

Тітов В. А.  
Лаврінєнков А. Д.  
Власюк І. А.

## АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ ГАРЯЧОГО ПРОКАТУВАННЯ МЕТОДОМ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ

*Аналiтичним та чисельним методами досліджено напружено-деформований стан металу в осередку деформації при гарячому прокатуванні. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення точності інженерних розрахунків параметрів прокатування багатошарових і товстих заготовок, для яких класичні одновимірні моделі не відображають реальної неоднорідності пластичної течії металу по товщині. Метою дослідження є розробка аналітичного методу оцінювання середніх і нормальних напружень в осередку деформації на основі теорії пластичної течії з використанням наперед заданого кінематично допустимого поля швидкостей. У роботі виконано аналітичний огляд сучасних підходів до моделювання процесу прокатування, зокрема методу балансу сил та методу верхньої оцінки. Запропоновано плоску модель течії металу з нелінійним розподілом компонент швидкостей переміщень у зоні контакту з валками. На основі рівняння нерозривності отримано швидкості деформацій та визначено інтенсивність швидкостей деформацій у всьому об'ємі осередку. Положення нейтрального перерізу встановлено з умови балансу зовнішніх сил, що діють на штабу. Для ідеально пластичного матеріалу визначено коефіцієнт жорсткості, середні та нормальні напруження шляхом інтегрування рівнянь пластичної течії з урахуванням граничних умов на вході в осередок деформації. Для перевірки достовірності аналітичних результатів виконано чисельне моделювання процесу прокатування методом скінченних елементів у середовищі Abaqus CAE. Отримано розподіли середніх напружень та порівняно їх із аналітичними залежностями в площині симетрії штаби. Встановлено кількісне співвідношення напружень на вході та виході з осередку деформації та якісну відповідність характеру їх розподілу по довжині осередку. Отримані результати можуть бути використані для інженерного аналізу процесів гарячого прокатування багатошарових зразків та зразків в оболонках, а перспективи подальших досліджень пов'язані з урахуванням впливу контактної тертя на кінематичне поле, температурної неоднорідності, реальних законів зміцнення матеріалу та розширенням методу на задачі багатошарового прокатування.*

**Ключові слова:** гаряче прокатування, осередок деформації, пластична течія, напружено-деформований стан, поле швидкостей, аналітичне моделювання, метод скінченних елементів, середні напруження.

В останні роки все більше уваги приділяється аналітичним методам пластичної течії металу, який ґрунтується на загальних рівняннях механіки суцільного середовища з використанням полів швидкості переміщень матеріальних частинок в осередку деформації.

В даній роботі проаналізовано існуючі підходи визначення технологічних параметрів та напружено-деформованого стану металу при процесах прокатування листового металу та тонких штаб. Процесу прокатки присвячено велику кількість наукових публікацій вітчизняних та закордонних авторів. Фундаментальний внесок у розробку теорії та технології листового прокатування зробили науковці В. Л. Мазур, А. В. Ноговіцин, А. П. Грудєв, К.О. Гогаєв та інші [1–4]. У їхніх працях, що базуються на теоріях Кармана та Целікова, глибоко опрацьовано питання енергосилових параметрів, удосконалення розрахункових методик з урахуванням умов тертя та мастила, а також аналізу стійкості процесу тонколистового прокатування. Особлива увага в цих дослідженнях приділялася адаптації аналітичних рішень до реальних виробничих умов та ресурсозбереженню.

Паралельно, як зазначається в оглядах Р. Montmitonnet [5] та J.G. Lenard [6], у світовій науці поряд з класичними методами балансу сил розвивалися методи аналізу, засновані на енергетичних принципах. Широкого застосування набув метод верхньої оцінки (Upper Bound Method). Низка дослідників [7–16] незалежно розробили варіацію підходів для моделювання процесу прокатування.

На сучасному етапі, як у вітчизняних, так і в закордонних дослідженнях, спостерігається тенденція використання чисельних підходів (зокрема МСЕ), які дозволяють враховувати неоднорідність розподілу температур та ефекти розвитку деформації у товстих плитах. Однак, наявні аналітичні методи часто дають лише усереднену оцінку і не дозволяють

повною мірою описати НДС при прокатуванні специфічних багатошарових систем, що обумовлює необхідність подальших досліджень.

Метою даної роботи є спроба розробки аналітичної моделі на основі теорії пластичної течії, який опирається на попередньо побудований розподіл швидкостей. Використання методу пластичної течії дозволяє визначити переміщення фізичних матеріальних точок, оцінити нормальні та відповідно середні напруження в осередку деформацій досліджуваного матеріалу при пластичній деформації. Це забезпечує ефективність використання при аналізі процесів структурно-неоднорідних суцільних середовищ – композиційних матеріалів.

При побудові розподілу розглянуто плоску задачу. Прийняті позначення та координатна система позначені на рис. 1.

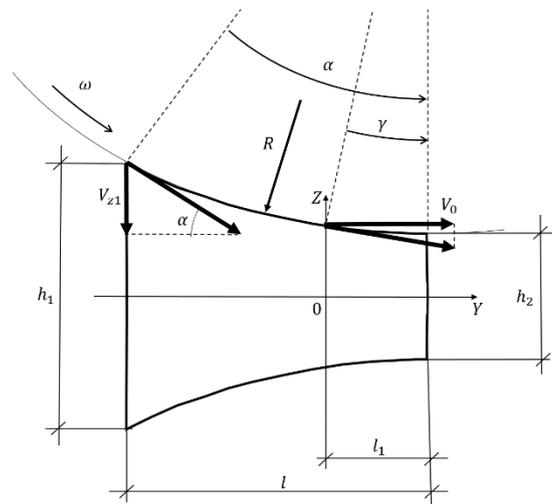


Рис. 1. Розрахункова схема осередку деформації при прокатці:

$Y, Z$  – координатні осі,  $R$  – радіус валків,  $\omega$  – кутова швидкість валків,  $\alpha$  – кут захоплення,  $\gamma$  – нейтральний кут,  $l$  – довжина осередку деформації,  $l_1$  – відстань від нейтрального перерізу до виходу з осередку,  $V_{z1}$  – вертикальна компонента швидкості на початку контакту,  $V_0$  – лінійна швидкість валків,  $h_1$  – товщина штаби перед прокатуванням,  $h_2$  – товщина штаби після прокатування.

Розподіл вертикальної компоненти швидкості металу на контакті вибрано лінійним та рівним нулю на виході з осередку (рис. 2):

$$v_z(y, z) = -\frac{V_{z1}}{l}(l_1 - y).$$

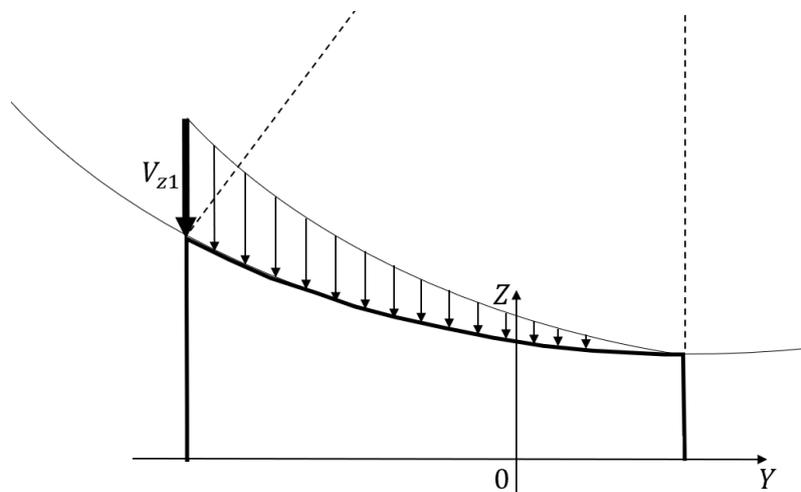


Рис. 2. Розподіл вертикальної компоненти швидкості металу на контакті

Очевидною є умова рівності нулю вертикальної компоненти швидкості в площині симетрії штаби (вісь Y на Рис. 2). Оскільки штаба є дзеркальною відносно цієї площини, затухання компоненти  $v_z$  від контакту до площини симетрії має задаватися непарною функцією  $\Psi(z)$ , при чому  $\Psi(0) = 0, \Psi(\pm h_1/2) = \pm 1$ . Таким чином залежність  $v_z(y, z)$  вибрано наступною:

$$v_z(y, z) = -\frac{V_{z1}}{l} (l_1 - y) \cdot \Psi(z) = -\frac{V_{z1}}{l} (l_1 - y) \cdot \left( 3 \frac{z}{h_1} - 4 \frac{z^3}{h_1^3} \right),$$

де кубічний член є необхідним для утворення залежності  $v_y$  не тільки від координати  $y$ , а й від  $z$ . Використовуючи рівняння нерозривності, отримано

$$v_y(y, z) = \frac{V_{z1}}{l} \left( y l_1 - \frac{y^2}{2} \right) \left( \frac{3}{h_1} - 12 \frac{z^2}{h_1^3} \right) + V_0$$

Схематично, графіки розподілу швидкостей переміщень зображено на рисунках 3–4.

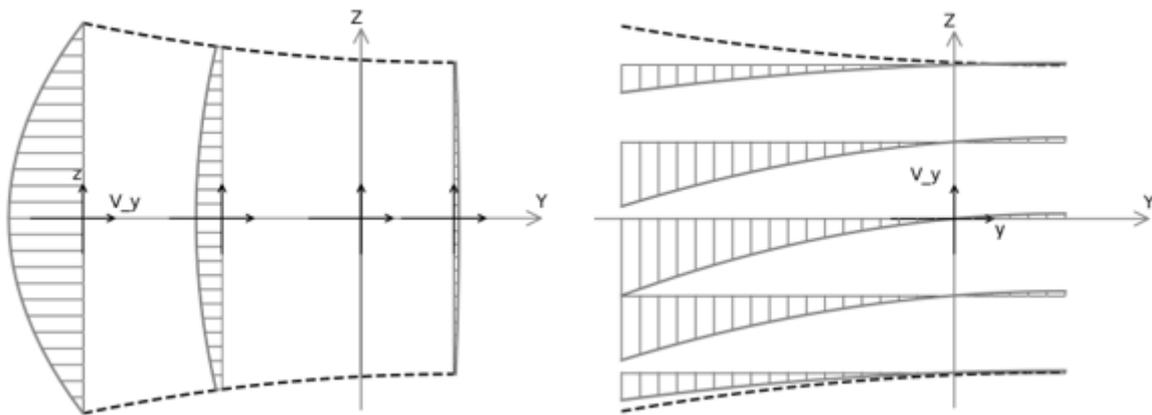


Рис 3. Розподіл швидкості  $v_y$  в осередку деформації: штрихові лінії – зони контактів з валками. Зліва – розподіл  $v_y$  по висоті перерізу (від координати  $z$ ) в різних поперечних площинах, справа – розподіл  $v_y$  по довжині осередку (від координати  $y$ ) в площині симетрії штаби.

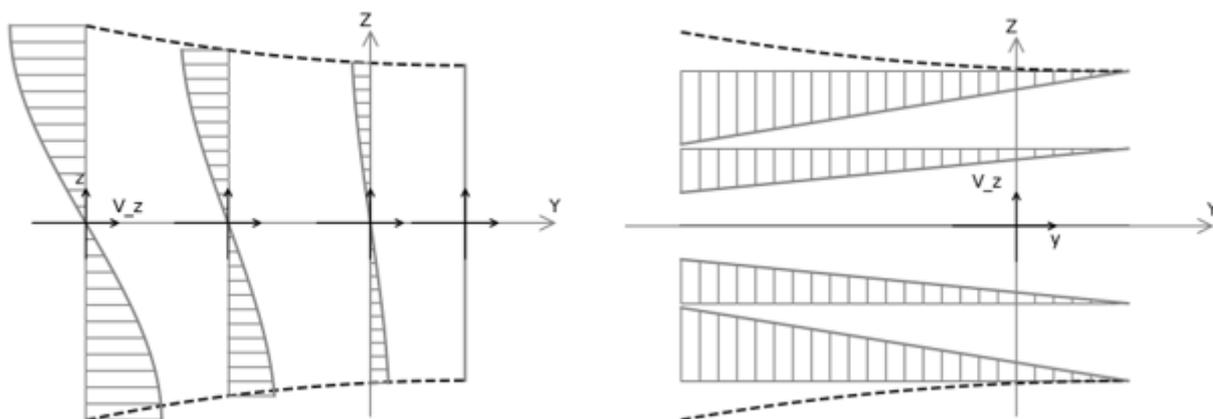


Рис. 4. Розподіл швидкості  $v_z$  в осередку деформації: штрихові лінії – зони контактів з валками. Зліва – розподіл  $v_z$  по висоті перерізу (від координати  $z$ ) в різних поперечних площинах, справа – розподіл  $v_z$  по довжині осередку (від координати  $y$ ) в площинах на різних висотах по штабі.

Швидкості деформацій (графічно на рис. 5)

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} = -\epsilon_{zz} &= \frac{V_{z1}}{l} (l_1 - y) \left( \frac{3}{h_1} - 12 \frac{z^2}{h_1^3} \right) \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{V_{z1}}{l} \left( y l_1 - \frac{y^2}{2} \right) \left( -24 \frac{z}{h_1^3} \right) + \frac{V_{z1}}{l} \left( 3 \frac{z}{h_1} - 4 \frac{z^3}{h_1^3} \right) \end{aligned}$$

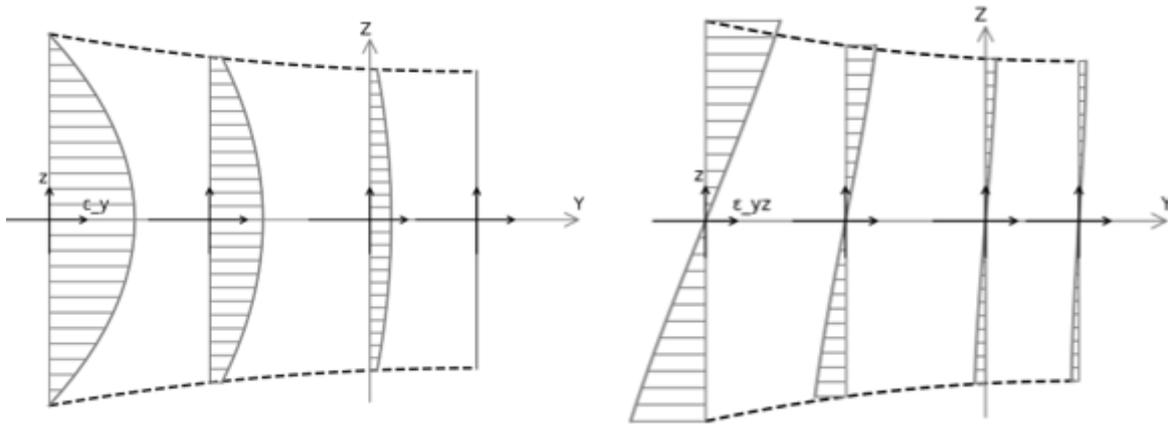


Рис. 5. Розподіл швидкості деформації  $\epsilon_y$  та  $\epsilon_{yz}$  в осередку деформації: штрихові лінії – зони контактів з валками. Зліва – розподіл  $\epsilon_y$ , справа – розподіл  $\epsilon_{yz}$  по висоті осередку (в залежності від координати  $z$ ) в різних перерізах.

Положення нейтрального перерізу знайдено з умови балансу сил. Цей метод описаний в роботі Василева Я.Д. і Мінаєва О.А. [17], де отримано формулу:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2f_y} \right),$$

де  $\gamma$  – нейтральний кут,  $\alpha$  – кут захоплення штаби,  $f_y$  – коефіцієнт тертя.

Тоді для відстані  $l_1$  отримано вираз:

$$l_1 = R\gamma = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{l}{2Rf_y} \right)$$

Інтенсивність швидкостей деформації (графічно на рис. 6)

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)} \\ &= [\epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{zx} = 0, \epsilon_{yy} = -\epsilon_{zz}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \\ &= \frac{V_{z1}}{lh^3\sqrt{3}} \sqrt{36(l_1 - y)^2(h_1^2 - 4z^2)^2 + z^2(12y^2 - 24l_1y + 3h_1^2 - 4z^2)^2} \end{aligned}$$

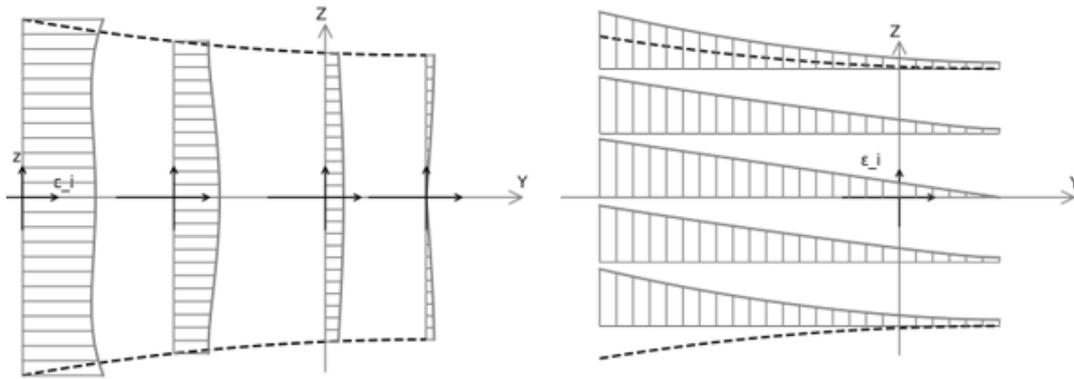


Рис. 6. Розподіл інтенсивності швидкостей деформацій  $\epsilon_i$  в осередку деформації: штрихові лінії – зони контактів з валками. Зліва – розподіл по висоті осередку (в залежності від координати  $z$ ), справа – по довжині (в залежності від координати  $y$ ).

Коефіцієнт жорсткості

$$\mu_i = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i},$$

де  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень,  $\epsilon_i$  – інтенсивність швидкостей деформації.

Для спрощення розрахунку, матеріал прийнято ідеально пластичним, тобто  $\sigma_i = \sigma_s$ , де  $\sigma_s$  – границя текучості матеріалу зразка.

Середні напруження в осередку деформації знайдено інтегруванням

$$\sigma = \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy + \int \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz,$$

де частинні похідні  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$  та  $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$  отримуються із загального рівняння пластичної течії

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= -\mu_i \Delta V_x - 2 \frac{\partial \mu_i}{\partial x} \epsilon_x - \frac{\partial \mu_i}{\partial y} \epsilon_{xy} - \frac{\partial \mu_i}{\partial z} \epsilon_{xz} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= -\mu_i \Delta V_y - \frac{\partial \mu_i}{\partial x} \epsilon_{xy} - 2 \frac{\partial \mu_i}{\partial y} \epsilon_y - \frac{\partial \mu_i}{\partial z} \epsilon_{yz} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= -\mu_i \Delta V_z - \frac{\partial \mu_i}{\partial x} \epsilon_{xz} - \frac{\partial \mu_i}{\partial y} \epsilon_{yz} - 2 \frac{\partial \mu_i}{\partial z} \epsilon_z \end{aligned}$$

Нормальні напруження отримано з формул:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma \\ \sigma_{yy} &= \sigma + 2\mu_i \epsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \sigma + 2\mu_i \epsilon_{zz} \end{aligned}$$

Перед входом металу в осередок зовнішній обтиск відсутній. Тому для визначення константи інтегрування вибрано граничну умову

$$\sigma_{yy}(y = l_1 - l) = 0$$

Для валідації отриманих аналітичних напружень проведено чисельне моделювання плоскої задачі процесу прокатування в студентській версії Abaqus CAE. Чисельна модель штаби та валків перед розрахунком та після зображені на рисунку 7. Розглянуто половину

штаби та один валок, внаслідок симетрії задачі. Прийняті параметри системи: валки абсолютно жорсткі, обертаються зі швидкістю 1.74 рад/с; початкова товщина штаби – 10 мм, кінцева – 8.5 мм; матеріал прийнято ідеально пластичним, модуль Юнга – 200 ГПа, межа пластичності – 50 МПа; коефіцієнт тертя між валком та штабою – 0.2.

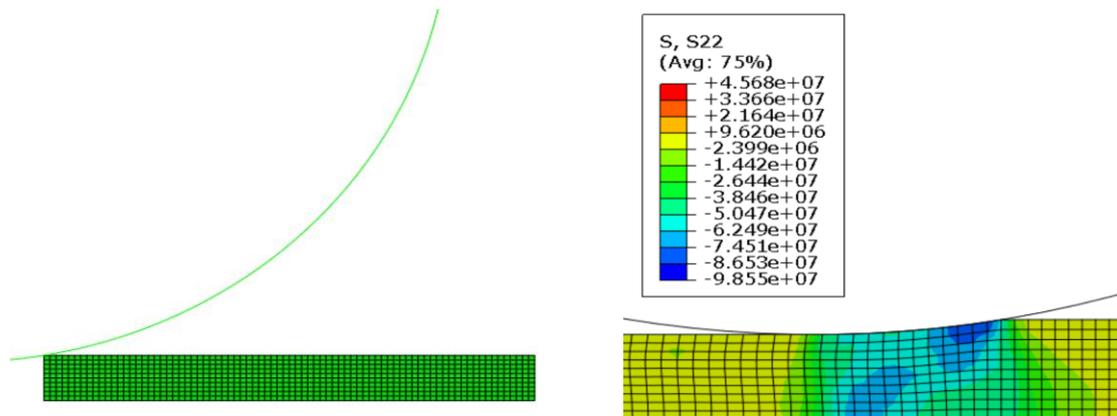


Рис. 7. Чисельна модель: зліва – до розрахунку, справа – розподіл вертикальних нормальних напружень після проведення розрахунку.

Обравши такі ж параметри і при аналітичному розрахунку, отримано середні напруження для обох методів. На рисунку 8 зображено порівняння напружень в площині симетрії штаби.

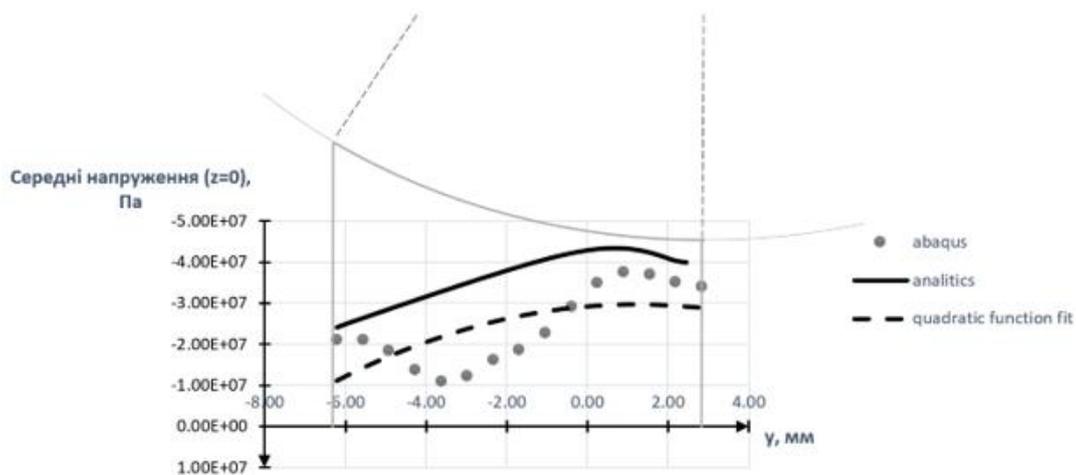


Рис. 8. Порівняння розподілу середніх напружень аналітичного та чисельного методів в площині симетрії.

## ВИСНОВКИ

Опираючись на теорію пластичної течії, побудовано метод аналітичного розрахунку середніх напружень в осередку деформації при прокатуванні. Для вибраних конкретних параметрів системи розраховано розподіл напружень. Для валідації отриманих результатів проведено чисельне моделювання процесу прокатування з тими ж параметрами. Результати порівняння середніх напружень в площині симетрії показують кількісне співпадіння величин напружень на початку ( $\sim 0.1l$ ) та в кінці ( $\sim 0.2l$ ) осередку деформації, з максимальним відхиленням  $\sim 20\%$  в цих зонах. Спостерігається якісне співпадіння між аналітичним розподілом та квадратичною апроксимацією розподілу чисельного розрахунку, при цьому середнє відхилення між ними складає  $\sim 50\%$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мазур В. Л. Современные задачи теории и технологии прокатки: возможности и пути решения. *New technologies and achievements in metallurgy, material engineering, production engineering and physics: collective monograph*. Chestochowa. 2017. Series: Monografie № 286. pp. 218–223.
2. Мазур В. Л., Ноговицын А. В. Теория и технология тонколистовой прокатки (численный анализ и технические приложения). Днепропетровск: РВА «Дніпро-VAL». 2012. 500 с.
3. Мазур В. Л. Материаловедческие основы, состояние и перспективы развития теории и технологии тонколистовой прокатки. *Физико-технологические проблемы современного материаловедения*. Киев: Академперіодика. 2013. Т. 1. С. 289–301.
4. Мазур В. Л. Состояние и перспективы развития теории и технологии тонколистовой прокатки. *Обработка металлов давлением*. Краматорск: ДГМА. 2012. С. 136–141.
5. Montmitonnet P., Buessler P. A Review on Theoretical Analyses of Rolling in Europe. *ISIJ International*. 1991. Vol. 31, pp. 525-538.
6. Lenard J. G. *Primer on Flat Rolling*. Elsevier. 2014. Chapter 5: Mathematical and Physical Modelling of the Flat Rolling Process.
7. Jiang L. The mechanical parameters modeling of heavy steel plate snake/gradient temperature rolling with the same roll diameters. *Metallurgical Research and Technology*. 2020. Vol. 117, no. 3.
8. Alexander J. M. On the theory of rolling. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1972. Vol. 326, pp. 535-563.
9. Zhao D. Rolling With Simplified Stream Function Velocity and Strain Rate Vector Inner Product. *Journal Of Iron And Steel Research, International*. 2012. Vol. 19, pp. 20-24.
10. Oh S. I., Kobayashi S. An Approximate Method for a Three-Dimensional Analysis of Rolling. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1975. Vol. 17, pp. 293-305.
11. Sezek S. Analysis of cold and hot plate rolling using dual stream functions. *Materials & Design*. 2008. Vol. 29, pp. 584-596.
12. Zhang S. Modeling of rolling force of ultra-heavy plate considering the influence of deformation penetration coefficient. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 159, pp. 373-381.
13. Liu Y. M., Sun J., Wang Q. L. et al. Mathematical model for cold rolling based on energy method. *Meccanica*. 2016. Vol. 52, pp. 1–12.
14. You G., Li S., Wang Z. et al. A novel analytical model based on arc tangent velocity field for prediction of rolling force in strip rolling. *Meccanica*. 2020. Vol. 55.
15. Jiang L.-Y. The Central Strain Analytical Modeling and Analysis for the Plate Rolling Process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2021. Vol. 118, pp. 2873-2882.
16. Hao P., Liu J., Yao C. A Novel 2D Metal Flow Model for Hot Rolling of Aluminum Alloy Thick Plate. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2022. Article ID 9742633.
17. Васильєв Я. Д., Мінаєв О. А. Теорія позовжньої прокатки. Донецьк: УНІТЕХ. 2009. 488 с.

## REFERENCES

1. Mazur V. L. Modern problems of rolling theory and technology: opportunities and ways of solution. *New technologies and achievements in metallurgy, material engineering, production engineering and physics: collective monograph*. Chestochowa. 2017. Series: Monografie № 286. pp. 218–223.
2. Mazur V. L., Nogovitsyn A. V. Theory and technology of thin sheet rolling (numerical analysis and technical applications). Dnipropetrovsk: RVA "Dnipro-VAL". 2012. 500 p.
3. Mazur V. L. Materials science foundations, state and prospects of development of thin sheet rolling theory and technology. *Physico-technological problems of modern materials science*. Kyiv: Akadempriodyka. 2013. Vol. 1. pp. 289–301.
4. Mazur V. L. State and prospects of development of thin sheet rolling theory and technology. *Materials Working by Pressure*. Kramatorsk: DSEA. 2012. pp. 136–141.
5. Montmitonnet P., Buessler P. A Review on Theoretical Analyses of Rolling in Europe. *ISIJ International*. 1991. Vol. 31, pp. 525–538.
6. Lenard J. G. *Primer on Flat Rolling*. Elsevier. 2014. Chapter 5: Mathematical and Physical Modelling of the Flat Rolling Process.
7. Jiang L. The mechanical parameters modeling of heavy steel plate snake/gradient temperature rolling with the same roll diameters. *Metallurgical Research and Technology*. 2020. Vol. 117, no. 3.
8. Alexander J. M. On the theory of rolling. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1972. Vol. 326, pp. 535-563.
9. Zhao D. Rolling With Simplified Stream Function Velocity and Strain Rate Vector Inner Product. *Journal Of Iron And Steel Research, International*. 2012. Vol. 19, pp. 20-24.
10. Oh S. I., Kobayashi S. An Approximate Method for a Three-Dimensional Analysis of Rolling. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1975. Vol. 17, pp. 293-305.
11. Sezek S. Analysis of cold and hot plate rolling using dual stream functions. *Materials & Design*. 2008. Vol. 29, pp. 584-596.
12. Zhang S. Modeling of rolling force of ultra-heavy plate considering the influence of deformation penetration coefficient. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 159, pp. 373-381.

13. Liu Y. M., Sun J., Wang Q. L. et al. Mathematical model for cold rolling based on energy method. *Meccanica*. 2016. Vol. 52, pp. 1–12.
14. You G., Li S., Wang Z. et al. A novel analytical model based on arc tangent velocity field for prediction of rolling force in strip rolling. *Meccanica*. 2020. Vol. 55.
15. Jiang L.-Y. The Central Strain Analytical Modeling and Analysis for the Plate Rolling Process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2021. Vol. 118, pp. 2873-2882.
16. Hao P., Liu J., Yao C. A Novel 2D Metal Flow Model for Hot Rolling of Aluminum Alloy Thick Plate. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2022. Article ID 9742633.
17. Vasyliiev Ya. D., Minaiev O. A. Theory of longitudinal rolling. Donetsk: UNITECH. 2009. 488 p.

**Titov V., Lavrinenkov A., Vlasiuk I. Analytical description of the hot rolling process by the plastic flow method.**

*The stress-strain state of the metal in the deformation zone during hot rolling is investigated by analytical and numerical methods. The relevance of the work is due to the need to improve the accuracy of engineering calculations of rolling parameters for multilayer and thick billets, for which classical one-dimensional models do not reflect the real inhomogeneity of the plastic flow of metal along the thickness. The aim of the study is to develop an analytical method for estimating mean and normal stresses in the deformation zone based on the theory of plastic flow using a predetermined kinematically admissible velocity field. An analytical review of modern approaches to modeling the rolling process, in particular the force balance method and the upper bound method, is carried out in the paper. A plane model of metal flow with a nonlinear distribution of displacement velocity components in the zone of contact with the rolls is proposed. Based on the continuity equation, strain rates are obtained and the strain rate intensity is determined in the entire volume of the deformation zone. The position of the neutral section is established from the condition of the balance of external forces acting on the strip. For a perfectly plastic material, the stiffness coefficient, mean and normal stresses are determined by integrating the plastic flow equations taking into account the boundary conditions at the entrance to the deformation zone. To verify the reliability of analytical results, numerical simulation of the rolling process was performed using the finite element method in the Abaqus CAE environment. Distributions of mean stresses were obtained and compared with analytical dependencies in the symmetry plane of the strip. Quantitative coincidence of stresses at the entrance and exit from the deformation zone and qualitative correspondence of the nature of their distribution along the length of the zone were established. The obtained results can be used for engineering analysis of hot rolling processes of multilayer samples and samples in shells, and the prospects for further research are associated with taking into account the influence of contact friction on the kinematic field, temperature inhomogeneity, real laws of material hardening and extending the method to multilayer rolling problems.*

**Key words:** hot rolling, deformation zone, plastic flow, stress-strain state, velocity field, analytical modeling, finite element method, mean stresses.

**Тітов В'ячеслав Андрійович** – д-р техн. наук, професор, НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

**Titov Viacheslav** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute

E-mail: vat.kpi@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4234-6961>

**Лаврінєнков Антон Дмитрович** – канд. техн. наук, доцент, НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

**Lavrinenkov Anton** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute

E-mail: a.lavrinenkov@kpi.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3292-7663>

**Власюк Іван Андрійович** – студент, НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

**Vlasiuk Ivan** – Student, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute

E-mail: djovanni27@gmail.com

НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

*Стаття надійшла до редакції 12.10.25 р.*