

Михалевич В. М.
Добранюк Ю. В.
Тютюнник О. І.
Колісник М. А.

ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ В ТЕОРІЇ ПІДСУМОВУВАННЯ ПОШКОДЖЕНЬ

У статті, на тлі стислого та фрагментарного огляду розвитку теорії деформовності у працях вітчизняних науковців, розглянуто поняття лінійного та нелінійного принципів підсумовування пошкоджень у їх зв'язку з відповідними скалярними й тензорними моделями. Досліджено критеріальні співвідношення, що впливають із цих моделей, для опису граничних пластичних деформацій у процесах стаціонарного та нестаціонарного деформування.

На прикладі двостадійного процесу, що на кожній стадії є стаціонарним процесом, тобто характеризується незмінним значенням показника напруженого стану, продемонстровано закономірності зміни граничних деформацій у відносних координатах, що відображують залежність залишкового від використаного ресурсу пластичності. Обґрунтовано переваги представлення критеріальних співвідношень у вказаних координатах, що полягають в універсальності порівнянь та крацюму відображенні змін, тенденцій і зручному врахуванні масштабів даних. Продемонстровано принципову якісну та кількісну відмінність критеріальних співвідношень, що впливають з моделей, які базуються на лінійному та нелінійному принципах підсумовування пошкоджень, стосовно двостадійного процесу деформування. Виявлено, зокрема, що при використаному ресурсі пластичності 0,5 на першій стадії, розрахункова прогнозна величина залишкового ресурсу за нелінійним критеріальним співвідношенням дорівнює 0,84 для процесу «розтяг-кручення» та 0,06 для «кручення-розтяг», тоді як за лінійним критерієм залишковий ресурс дорівнює 0,5 в обох випадках.

Під час аналізу моделі В. А. Огороднікова висвітлено її переваги та недоліки, яким в літературі було приділено недостатньо уваги. Показано для яких класів нестаціонарного деформування вказана модель, що відображує нелінійний принцип підсумовування пошкоджень, стає тотожною найпростішій лінійній моделі. Тим самим уточнено рекомендації по межах застосування різних моделей підсумовування пошкоджень.

Ключові слова: *теорія підсумовування пошкоджень, теорія деформовності, гранична пластична деформація, показник напруженого стану, двостадійний процес деформування, скалярні та тензорні моделі, ресурс пластичності.*

Під час моделювання процесів обробки тиском однією із основних є задача оцінки та прогнозування деформовності матеріалу заготовки. Найбільш поширеним підходом для вирішення вказаної задачі є теорія підсумовування пошкоджень [1, 2, 3, 4, 5]. За останні десятиліття цей підхід отримав неабиякий розвиток у закордонних публікаціях [6, 7, 8, 9].

Для прогнозування деформовності матеріалу заготовки за допомогою теорії підсумовування пошкоджень необхідні відомості про властивості матеріалу за умови стаціонарного деформування, дані про напружено-деформований стан матеріалу в небезпечній області заготовки під час процесу пластичного деформування та модель підсумовування пошкоджень.

Десятки, а швидше сотні, закордонних публікацій цього століття присвячені перш за все, розробці як моделей представлення граничних деформацій матеріалу в залежності від безрозмірних показників напруженого стану під час стаціонарного деформування, так і відповідних методів експериментальних досліджень разом із накопиченням їх результатів для різних матеріалів.

Проте, останнім часом все більше і більше і в закордонних публікаціях акцентується увага на необхідності врахування зміни напружено-деформованого стану (НДС) під час вирішення задачі прогнозування деформовності матеріалу заготовки [8, 9]. Ці задачі постійно знаходяться в центрі уваги вітчизняних науковців [2, 3, 10, 11, 12].

Мета роботи – дослідження моделей підсумовування пошкоджень в теорії деформовності для врахування умов розвитку НДС матеріала.

Найпростішою моделлю підсумовування пошкоджень є модель, що базується на лінійному принципі підсумовування пошкоджень

$$\psi(\bar{e}_{i0}) = \int_0^{\bar{e}_{i0}} \frac{dx}{\bar{e}_{fs}[\eta(x)]} < 1, \quad \psi(\bar{e}_f) = 1, \quad (1)$$

де ψ , $0 \leq \psi \leq 1$ – ресурс пластичності; \bar{e}_{i0} – досягнутий рівень накопиченої деформації \bar{e}_i ; η – показник напруженого стану, що дорівнює відношенню першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень; $\bar{e}_{fs} = \bar{e}_{fs}(\eta)$ – залежність граничних пластичних деформацій матеріалу заготовки від показника напруженого стану η за умови його незмінності під час деформування; $\eta = \eta(\bar{e}_i)$ або $(\bar{e}_i = \bar{e}_i(\eta))$ – траєкторія деформування макрочастинки матеріалу в небезпечній області заготовки; \bar{e}_f – гранична накопичена деформація під час пластичної формозміни відповідно заданій траєкторії деформування.

Стосовно багатостадійного процесу, коли в межах кожної стадії показник напруженого стану залишається незмінним, модель (1) набуває вигляду

$$\psi(\bar{e}_{i0}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \bar{e}_i}{\bar{e}_{fs}(\eta_i)} < 1, \quad \bar{e}_{i0} = \sum_{i=1}^n \Delta \bar{e}_i. \quad (2)$$

Стосовно до двостадійного процесу деформування останнє співвідношення можемо записати у вигляді

$$\psi_{f2} = 1 - \psi_1, \quad (3)$$

де $\psi_1 = \frac{\Delta e_1}{\bar{e}_{fs}(\eta_1)}$ – використаний ресурс пластичності на першій стадії; $\psi_{f2} = \frac{\Delta e_2}{\bar{e}_{fs}(\eta_2)}$ – залишковий ресурс пластичності на другій стадії.

Відповідно введений термінології під стаціонарним деформуванням розуміється одностадійний процес деформування, стосовно до якого з (2) або з (1) впливає

$$\psi(\bar{e}_i) = \frac{\bar{e}_i}{\bar{e}_{fs}(\eta)} < 1. \quad (4)$$

Важливою особливістю співвідношень (2), (3) та (4) є їх лінійний характер відносно накопиченої деформації. Проте важливо розділяти лінійний принцип підсумовування пошкоджень та лінійний характер залежності величини пошкоджень від величини накопиченої деформації. Лінійні співвідношення типу (2), (3) та (4) впливають з моделі (1) тільки стосовно процесів стаціонарного деформування ($\eta(e_i) = \eta_k = const$).

Експериментальні дані, що накопичені за різних умов нестационарного деформування [2, 4, 11], в багатьох випадках суперечать співвідношенням, що отримані на основі лінійного принципу підсумовування пошкоджень.

На відміну від моделі типу (1), що базується на лінійному принципі підсумовування пошкоджень, аналогічних моделей, що базуються на нелінійному принципі підсумовування пошкоджень може бути як завгодно багато.

В [2] висвітлено принципи побудови подібних моделей та запропоновано низка конкретних математичних представлень.

Загальновідомою є модель, що базується на степеневому описанні нелінійного характеру підсумовування пошкоджень

$$\psi(\bar{e}_{i0}) = \int_0^{\bar{e}_{i0}} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\bar{e}_{fs}^n[\eta(x)]} \cdot dx < 1, \quad \psi(\bar{e}_f) = 1, \quad (5)$$

де n – матеріальна стала.

Зауважимо, що подібні моделі, представлені на основі використання різних нелінійних залежностей, будуть мати одні й ті самі закономірності стосовно широкого класу траєкторій деформування.

Стосовно до двостадійного процесу деформування із цієї моделі впливає критеріальне співвідношення для визначення залишкового ресурсу пластичності на другій стадії в залежності від використаного ресурсу пластичності ψ_1 на першій стадії та співвідношення величин граничних деформацій для умов стаціонарного деформування, що реалізовані на кожній стадії α_{12}

$$\psi_{f2} = \left(1 + \psi_1^n (\alpha_{12}^n - 1)\right)^{\frac{1}{n}} - \psi_1 \alpha_{12}, \quad (6)$$

де $\alpha_{12} = \frac{\bar{e}_{f1}}{\bar{e}_{f2}}$, $\bar{e}_{fk} = \bar{e}_{fs}(\eta_k)$, $k = 1, 2$; $\eta_k = const$.

На рис. 1 показано характер зміни залишкового ресурсу відповідно до моделей, що базуються на лінійному та нелінійному принципах підсумовування пошкоджень. Важлива особливість цих моделей полягає в тому, що наслідком лінійного принципу підсумовування пошкоджень є принцип незалежності порядку, який в загальному випадку є наслідком принципу суперпозиції, характерного для лінійних систем. Принципова відмінність закономірностей зміни граничних деформацій, що впливають із моделей, які базуються на нелінійному принципі підсумовування пошкоджень, полягає в залежності зміни залишкового ресурсу пластичності від параметра α_{12} .

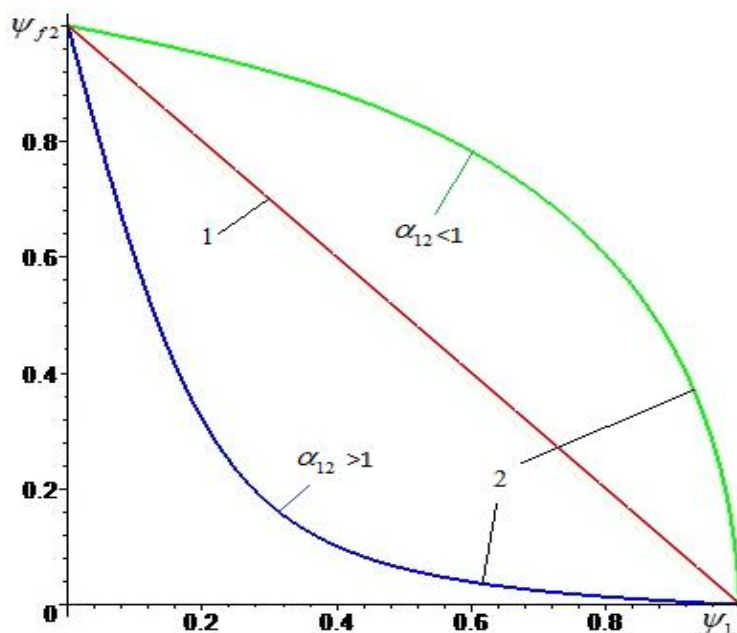


Рис. 1. Залежність залишкового ресурсу на другій стадії від величини використаного ресурсу пластичності на першій стадії:

1 – згідно лінійного принципу накопичення пошкоджень, розрахунок за (3); 2 – згідно нелінійного принципу накопичення пошкоджень, розрахунок за (6), $\alpha_{12} = 0.23$, $\alpha_{12} = 4.27$

Для розгляду конкретного прикладу наведемо таблицю граничних деформацій для різних матеріалів під час випробувань на стиск, кручення та розтяг (табл. 1). Така таблиця свого часу була зібрана на основі літературних даних В. А. Огородніковим та Л. І. Алієвою.

Таблиця 1

Граничні деформації за умов стаціонарного деформування при різних значеннях показника напруженого стану

№ п/п	Матеріал	Дані для побудови діаграми пластичності			Коефіцієнти чутливості пластичності для показника η	
		$\varepsilon_p(\eta_1 = 1)$	$\varepsilon_p(\eta_1 = 0)$	$\varepsilon_p(\eta_1 = -1)$	$\lambda_1 = \ln\left(\frac{\varepsilon_p(\eta_1 = 0)}{\varepsilon_p(\eta_1 = 1)}\right)$	$\lambda_2 = \ln\left(\frac{\varepsilon_p(\eta_1 = -1)}{\varepsilon_p(\eta_1 = 0)}\right)$
1	2	3	4	5	6	7
1	BT-1	0,64	1,15	2,9	0,58	0,92
2	P12	0,17	0,55	1,9	1,17	1,236
3	P6M5	0,23	0,46	0,95	0,69	0,72
4	20-A	1	1,3	1,7	0,26	0,25
5	AMГ-2	1,05	1,57	2,25	0,4	0,35
6	BT14	0,15	0,64	1,3	1,45	0,7
7	P18	0,03	0,37	1,16	2,5	1,14
8	P9	0,1	0,48	1,2	1,56	0,91
9	40XH2MA	0,48	0,76	1,52	0,45	0,69
10	Сталь 40	0,09	0,37	∞	1,4	∞
11	OT-4	0,35	0,75	1,6	0,762	0,757
12	40X	0,08	0,86	1,5	2,37	0,556
13	ЗОХМА	0,31	0,48	2,0	0,43	1,42
14	Сталь 35	0,2	0,53	1,63	0,97	1,1
15	08КП	0,355	0,5	0,7	0,342	0,336
16	У8А	0,03	0,39	1,2	2,56	1,12
17	13М5-А	0,28	0,38	0,9	0,305	0,862
18	XH70BMTЮ	0,38	0,68	1,1	0,58	0,481
19	XH77TIOP	0,29	0,62	0,96	0,76	0,437
20	ЛС59-1	0,4	0,55	0,65	0,318	0,176
21	ШХ-15	0,2	0,52	1,8	2,6	1,24
22	Д-1	0,3	0,47	0,5	0,2	0,3
23	ЗОХГСА	0,75	1,05	1,45	0,33	0,32
24	Сталь 3	0,25	0,36	∞	0,365	∞
25	Сталь 10	0,3	0,67	2,67	0,803	1,38
26	40X13	0,35	0,84	3,3	0,875	1,37
27	АВ	1,25	2,25	3,5	0,59	0,44
28	ЛС62	0,45	1,1	1,5	0,894	0,31
29	Сталь 45	0,15	0,4	1,1	0,981	1,01
30	Д16Т	0,08	0,42	0,9	1,66	0,762
31	X18H9T	0,38	0,76	1,6	0,693	0,744
32	Сталь 20	0,32	0,62	1,23	0,66	0,685
33	AMГ5B	0,735	1,0	1,25	0,31	0,223
34	Д16	0,875	1,25	1,625	0,36	0,262
35	Сталь 35	0,25	0,534	1,63	0,76	1,12
36	Л62	0,4	0,59	1,75	0,39	1,09
37	У8А (2 партія)	0,255	0,39	1,2	0,425	1,12
38	Д16 (2 партія)	0,10	0,41	1,5	1,46	1,30
39	Ст20 (2 партія)	0,3	0,65	1,25	0,773	0,654
40	Ст10 (2 партія)	0,32	0,65	1,42	0,710	0,780
41	Ст38Х2МЮА	0,55	0,75	1,30	0,30	0,551
42	Ст38Х2МЮА термооброблена	0,485	0,74	1,00	0,42	0,30
43	Ст30Х3МФА	0,74	0,85	1,13	0,14	0,28
44	Ст30Х3МФА термооброблена	0,74	0,85	1,13	0,11	0,92

У табл. 2 наведено порівняльні значення граничної деформації матеріалу ВТ9 для різних варіантів двостадійного процесу за умови однакового використаного ресурсу $\psi_1 = 0,5$, але з різною послідовністю типів напруженого стану при переході від першої до другої стадії. Су-марну до руйнування деформацію обчислювали за співвідношенням:

$$\bar{e}_{f\Sigma} = \Delta\bar{e}_1 + \Delta\bar{e}_{f2} = \Delta\bar{e}_{f1} \cdot \left(0,5 + \frac{\psi_{f2}(\psi_1 = 0,5, n = 3, \alpha_{12})}{\alpha_{12}} \right). \quad (7)$$

Переваги представлення критеріальних співвідношень у вигляді залежностей відносних показників (зокрема, залишкового ресурсу від використаного) порівняно з критеріальними залежностями граничної накопиченої деформації від деформації на першій стадії особливо яскраво проявляються при описі двостадійного процесу деформування. Ці переваги полягають в:

Універсальності порівнянь. Введення в співвідношення використаного та залишкового ресурсів надають можливість порівнювати закономірності зміни граничних деформацій матеріалів з різною здатністю до пластичного деформування без руйнування.

Кращому відображенні змін, тенденцій та зручному врахуванні масштабів даних. Очевидно, що для двостадійного процесу «розтяг-кручення» характерна вища гранична накопичена деформація. Водночас гранична накопичена деформація для процесу «кручення-розтяг»

є лише майже вдвічі меншою $\left(\frac{0,61}{0,33} \approx 1,8 \right)$, тоді як порівняння відповідних залишкових ре-
сурсів показує ефект на порядок більший $\left(\frac{0,84}{0,06} = 14 \right)$.

Отже представлення критеріальних співвідношень у вигляді залежностей залишкового ресурсу від використаного надає можливість більш об'єктивно оцінювати закономірності зміни показників граничного стану й підвищує коректність порівнянь для різних матеріалів та видів напруженого стану.

Зазначимо, що параметр α_{12} , що з'являється під час математичних перетворень у процесі виведення критеріального співвідношення на основі моделі, заснованої на нелінійному принципі підсумовування пошкоджень, був запропонований В. А. Огородніковим ще до появи співвідношення типу (6), як інженерний показник оцінки придатності матеріалів для листової штамповки методом чистової вирубки.

Таблиця 2

Порівняльні значення граничної деформації матеріалу ВТ9 для різних варіантів двостадійного процесу деформування

Процес дво-стадійного деформування	ψ_{f2}	$\bar{e}_{f\Sigma}$	α_{12}
розтяг-кручення	0.84	0.61	0,23
кручення-розтяг	0.06	0.33	4,27

Широкого використання набула модель В. А. Огороднікова, що була запропонована в 1975 р. та є окремим випадком степеневі моделі (5), в якій матеріальний параметр n представлено співвідношенням, що залежить від похідної $\frac{d\eta}{de_i}$.

$$\psi(\bar{e}_{i0}) = \int_0^{\bar{e}_{i0}} \frac{\left(1 + 0,2 \operatorname{arctg}\left(\frac{d\eta}{de_i}(x)\right)\right)^{0,2 \operatorname{arctg}\left(\frac{d\eta}{de_i}(x)\right)} \cdot x}{\left(\bar{e}_{fs}[\eta(x)]\right)^{1+0,2 \operatorname{arctg}\left(\frac{d\eta}{de_i}(x)\right)}} \cdot dx < 1, \quad \psi(\bar{e}_f) = 1. \quad (8)$$

Похідна $\frac{d\eta}{de_i}$ визначається траєкторією деформування.

Для обґрунтування достовірності та визначення параметра n цієї моделі була розроблена методика та отримані відповідні експериментальні дані щодо граничних деформацій матеріалу за сумісного кручення з розтягом за різними програмами суцільних циліндричних зразків. Програми проведення експериментів складала так, щоб для конкретного зразка реалізувати або стаціонарне деформування $0 \leq \eta_k = \text{const} \leq 1$ або одну з лінійних траєкторій

$$\begin{cases} \eta = b \cdot e_i, & 0 < b < \frac{1}{e_{ft}} \\ \eta = 1 - b_1 \cdot e_i, & 0 < b_1 < \frac{1}{e_{fs}} \end{cases}, \quad (9)$$

Вказані результати і до цього часу не втратили свого теоретичного та практичного значення.

При стаціонарному деформуванні $\eta = \eta_k = \text{const} \Rightarrow \frac{d\eta}{de_i} = 0$ і з цієї моделі, як і з моделі (1), випливає така залежність

$$\psi(\bar{e}_{i0}) = \frac{\bar{e}_{i0}}{\bar{e}_{fk}} < 1 \Rightarrow \psi(\bar{e}_{fk}) = 1, \quad (10)$$

Слід зазначити, що незважаючи на нелінійний принцип підсумовування пошкоджень, на якому базується модель (8), внаслідок вибраної структури виразу для параметра n , з неї, так само, як і з найпростішої моделі (1), стосовно двостадійного процесу деформування випливає лінійне критеріальне співвідношення (3). Це суттєво звужує межі її застосування, проте цінність розробки вказаної математичної моделі полягає не лише в отриманні її математичного представлення, але й в методиці її розробки, що включає обґрунтування її достовірності, зокрема, через визначення параметра моделі на основі експериментальних даних щодо граничних деформацій матеріалу під час сумісного кручення та розтягу за різними програмами деформування суцільних циліндричних зразків. При цьому, запропонована методика разом з математичними моделями для розрахунку вказаних програмам деформування є окремою цінністю, що дозволяє підвищити або перевірити точність та надійність будь-якої моделі підсумовування пошкоджень для певного класу траєкторій деформування.

У всіх представлених моделях використовуються подання граничних деформацій в залежності від одного безрозмірного показника напруженого стану. Звичайно, не складає принципівих труднощів формальне узагальнення моделей підсумовування пошкоджень у випадку заміни кривої граничних деформацій $\bar{e}_{fs}(\eta)$ поверхнею, що залежить від двох безрозмірних показників напруженого стану, наприклад, як це зроблено в [1].

На початку 80-х років минулого століття з'явилася як тензорно-лінійна модель, запропонована Г. Делем [2]:

$$\psi_{ij}(\bar{e}_{i0}) = \int_0^{\bar{e}_{i0}} \frac{(1-n) \cdot \bar{e}_{fs}[\eta(x)] + 2 \cdot n \cdot x}{\bar{e}_{fs}^2[\eta(x)]} \cdot \beta_{ij}(x) \cdot dx, \quad (11)$$

$$0 \leq \psi_{ij}(\bar{e}_{i0}) \cdot \psi_{ij}(\bar{e}_{i0}) < 1, \quad (12)$$

де β_{ij} – компоненти напрямного тензора приростів пластичної деформації; ψ_{ij} – компоненти тензора-девіатора пошкоджень; $\psi_{ij}(\bar{e}_{i0}) \cdot \psi_{ij}(\bar{e}_{i0})$ – другий інваріант девіатора пошкоджень, що використовується як міра пошкоджень; так і її узагальнення на випадок тензорної нелінійності [2, 3], що запишемо у вигляді

$$\psi_{ij}(\bar{e}_{i0}) = \int_0^{\bar{e}_{i0}} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\bar{e}_{fs}^n[\eta(x)]} \cdot \left((a-b) \cdot \beta_{ij}(x) + b \cdot \left(\beta_{ik}(x) \cdot \beta_{kj}(x) - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \right) \right) dx, \quad (13)$$

з тою самою мірою пошкоджень.

Тут

$$a = -3 \cdot D \cdot b + \sqrt{(3 \cdot D \cdot b)^2 - \frac{b^2}{6} + 1}, \quad |b| \leq \sqrt{6};$$

D – третій інваріант тензора β_{ij} ,

$$D = \sqrt{54} \cdot |\beta_{ij}|.$$

В. А. Матвійчук для розв'язання сформульованих ним задач, розробив математичну модель саме на основі тензорно-нелінійної моделі. І показав, що тензорно - лінійні моделі не здатні описати виявлені ним закономірності зміни граничних деформацій за умови суттєво немонотонних процесів деформування.

Систематичне дослідження критеріальних співвідношень для граничних деформацій стосовно холодного двохетапного деформування початково ізотропних матеріалів викладене в праці [3].

ВИСНОВКИ

1. Проаналізовано лінійний та нелінійний принципи підсумовування пошкоджень в їх зв'язку з відповідними скалярними та тензорними моделями та застосуванні для опису граничних пластичних деформацій у стаціонарних і нестаціонарних процесах деформування.

2. Продемонстровано переваги представлення критеріальних співвідношень у відносних координатах (залишковий ресурс від використаного), що забезпечують універсальність порівнянь, кращу візуалізацію змін, тенденцій і зручне врахування масштабів даних.

3. Виявлено принципові якісні та кількісні відмінності між критеріальними співвідношеннями, що впливають із моделей лінійного та нелінійного підсумовування пошкоджень. Це особливо проявляється у двостадійному процесі деформування: для процесів «розтяг-кручення» і «кручення-розтяг» нелінійний критерій показує значні відмінності у залишковому ресурсі порівняно з лінійним критерієм, що дає однаковий результат у обох випадках.

4. При аналізі моделі В. А. Огороднікова зазначено її переваги та недоліки, що раніше залишалися недостатньо дослідженими. Уточнено рекомендації щодо застосування цієї моделі для класів нестаціонарного деформування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Грушко О.В., Огородніков В.А., Слободянюк Ю.О. Деформовність маловуглецевого дроту в процесі його багатоступінчастого холодного волочіння. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2019. 3, С. 103–110. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2019-144-3-103-110>
2. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця. 1998. 195 с.
3. Михалевич В.М., Добранюк Ю.В., Тютюнник О.І. Моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при холодному двохетапному деформуванні: монографія. Вінниця: ВНТУ. 2024. 121 с. ISBN 978-617-8163-11-2
4. Сивак Р.І., Огородніков В.А., Архіпова Т.Ф. Немонотонна пластична деформація в процесах обробки металів тиском. Вінниця: ВНАУ. 2022. 202 с. ISBN 978-617-7230-46-7
5. Matviychuk V., Mikhalevich V., Shtuts A. Analysis of stress-strain state (sss) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping. *Vibrations in engineering and technology*. 2023. 1 (108), С. 63–72. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2023-1-7>
6. Hooputra H, Gese H, Dell H, Werner H. A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminum extrusions. *International Journal of Crashworthiness*. 2004. 9(5), pp. 449–664. <http://dx.doi.org/10.1533/ijcr.2004.0289>
7. Bai Y., Wierzbicki T. Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture. *Int. J. Fract.* 2010. 161, pp. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10704-009-9422-8>
8. Cao T.S. Models for ductile damage and fracture prediction in cold bulk metal forming processes: a review. *Int. J. Mater. Form.* 2017. 10, pp. 139–171. <https://doi.org/10.1007/s12289-015-1262-7>
9. Park S.J., Cerik B.C., Choung J. Comparative study on ductile fracture prediction of high-tensile strength marine structural steels. *Ships and Offshore Structures*. 2020 15(sup1), pp. 208–219. <https://doi.org/10.1080/17445302.2020.1743552>
10. Грушко О.В., Гуцалюк О.В., Андреев І.В., Мельниченко В.В., Студенець С.Ф. Механічні характеристики сплавів системи W–Ni–Fe. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2018. Т. 54, № 1, С. 88–94.
11. Михалевич В. М., Добранюк Ю. В. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія. Вінниця: ВНТУ. 2013. 180 с. ISBN 978-966-641-532-8
12. Матвійчук В.А., Колісник М.А., Штуць А.А. Побудова кривих граничних деформацій матеріалів. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2022. № 2 (105), С. 84–90. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2022-2-9>.

REFERENCES

1. Grushko O. V., Ogorodnikov V. A., Slobodianiuk Yu. O. Deformation of Low-Carbon Wire in the Process of its Multistage Cold Drawing. *Bulletin of the Vinnytsia Polytechnic Institute*. 2019. 3, pp. 103-110. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2019-144-3-103-110> (in Ukrainian).
2. Mikhalevich V. M. Tensor models of damage accumulation. Vinnytsia: "UNIVERSUM – Vinnytsia". 1998. 195 p. (in Ukrainian).
3. Mykhalevych V. M., Dobraniuk Yu. V., Tiutiunyk O. I. Damage accumulation models in isotropic materials during cold two-stage: monograph. Vinnytsia: VNTU. 2024. 121 p. ISBN 978-617-8163-11-2. (in Ukrainian).
4. Sivak R.I., Ogorodnikov V.A., Arkhipova T.F. Non-monotonic plastic deformation in the processes of processing metals by pressure. Vinnytsia: VNAU. 2022. 202 p. ISBN 978-617-7230-46-7. (in Ukrainian).
5. Matviychuk V., Mikhalevich V., Shtuts A. Analysis of stress-strain state (sss) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping. *Vibrations in engineering and technology*. 2023. 1 (108), pp. 63–72. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2023-1-7>.
6. Hooputra H, Gese H, Dell H, Werner H. A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminum extrusions. *International Journal of Crashworthiness*. 2004. 9(5), pp. 449–664. <http://dx.doi.org/10.1533/ijcr.2004.0289>.
7. Bai Y., Wierzbicki T. Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture. *Int J Fract.* 2010. 161, pp. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10704-009-9422-8>
8. Cao T.S. Models for ductile damage and fracture prediction in cold bulk metal forming processes: a review. *Int. J. Mater. Form.* 2017. 10, pp. 139–171. <https://doi.org/10.1007/s12289-015-1262-7>
9. Park S.J., Cerik B.C., Choung J. Comparative study on ductile fracture prediction of high-tensile strength marine structural steels. *Ships and Offshore Structures*. 2020 15(sup1), pp. 208–219. <https://doi.org/10.1080/17445302.2020.1743552>
10. Hrushko O.V., Gutsalyuk O.V., Andreev I.V., Melnychenko V.V., Studenets S.F. Mechanical characteristics of alloys of the W–Ni–Fe system. *Physicochemical Mechanics of Materials*. 2018. 54, 1, pp. 88–94. (in Ukrainian).
11. Mikhalevich V.M., Dobraniuk Yu.V. Modeling of the stress-strain and limit states of the surface of cylindrical samples under end compression: monograph. Vinnytsia: VNTU. 2013. 180 p. ISBN 978-966-641-532-8. (in Ukrainian).

12. Matviychuk V. A., Kolisnyk M. A., Shtuts A. A. Construction of curved limit deformations of materials. *Vibrations in engineering and technology*. 2022. № 2 (105), pp. 84-90. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2022-2-9>. (in Ukrainian).

Mykhalevych V., Dobraniuk Yu., Tiutiunnyk O., Kolisnyk M. Linear and non-linear models in damage summation theory

In the article, against the background of a brief and fragmentary review of the development of the theory of deformability in the works of domestic scientists, the concepts of linear and nonlinear principles of damage summation in their connection with the corresponding scalar and tensor models are considered. The criterion relations resulting from these models are studied for the description of the ultimate plastic deformations in the processes of steady and unsteady deformation.

On the example of a two-stage process, which in each stage is a stationary process, i.e. characterized by a constant value of the stress state index, the regularities of changes of the ultimate deformations in relative coordinates are demonstrated, which reflect the dependence of the residual on the plasticity resource used. The advantages of presenting the criterion relations in these coordinates are substantiated, which consist in universality of comparisons and better reflection of changes, trends, and convenient consideration of data scales. The fundamental qualitative and quantitative difference between the criterion relations derived from models based on linear and nonlinear principles of damage aggregation in relation to the two-stage deformation process is demonstrated. In particular, it was found that when using the plasticity resource of 0.5 in the first stage, the estimated residual life according to the nonlinear criterion relation is 0.84 for the tensile-torsion process and 0.06 for the torsion-tension process, while according to the linear criterion, the residual life is 0.5 in both cases.

The analysis of the model of V.A. Ogorodnikov shows its advantages and disadvantages, which have not been sufficiently considered in the literature. It is shown for which classes of transient deformations the specified model, which reflects the nonlinear principle of damage summation, becomes identical with the simplest linear model. Thus, the recommendations concerning the limits of application of various damage summation models are clarified.

Keywords: *damage summation theory, deformability theory, ultimate plastic deformation, stress state index, two-stage deformation process, scalar and tensor models, plasticity resource.*

Михалевич Володимир Маркусович – д-р техн. наук, проф., ВНТУ

Mykhalevych Volodymyr – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, VNTU

E-mail: mykhalevych@vntu.edu.ua

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1557-7331>

Добранюк Юрій Володимирович – канд. техн. наук, доц., ВНТУ

Dobraniuk Yurii – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, VNTU

E-mail: dobraniuk@vntu.edu.ua

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6387-6331>

Тютюнник Оксана Іванівна – канд. пед. наук, доц., ВНТУ

Tiutiunnyk Oksana – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, VNTU

E-mail: tutunnik.oksana@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8544-4246>

Колісник Микола Анатолійович – асистент, ВНАУ

Kolisnyk Mykola – Assistant, VNAU

E-mail: kolisnik30@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5502-6556>

ВНТУ – Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

VNTU – Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

ВНАУ – Вінницький національний аграрний університет, м. Вінниця

VNAU – Vinnytsia National Agrarian University, Vinnytsia

Стаття надійшла до редакції 02.08.24 р.