РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.2

Чигиринский В. В.
Науменко Е. Г.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

На практике часто приходится рассматривать задачи механики сплошной среды, в которых одновременно присутствует упругая и пластическая деформация материала. Игнорирование одной из них приводит к неверным решением прикладных задач. К примеру, такие сочетания приводят к таким нежелательным явлениям, как ползучесть, усталость. Действительно, малая пластическая деформация, не учитываемая законом Гука, с течением времени увеличивается, приводя к перераспределению напряжений и деформаций. Эти свойства, называемые последействием и релаксацией, имеют общее название *ползучесть* [1]. Имеет место изменение напряженного состояния с течением времени, вследствие большого числа циклов периодически меняющейся во времени нагрузки. Такое проявление пластичности называется *усталостью* [2]. Многие вопросы прочности машин и сооружений опираются на выводы теории пластичности. Считается, что возникновение пластических деформаций в локальной зоне конструкции еще не означает потери ее несущей способности в целом [3]. Этот прогрессивный метод расчета широко используется при проектировании экономичных машин, сооружений и позволяет в большей степени использовать ресурс прочности (носит название *несущая способность*). Таких примеров на практике множество.

Однако интерес для технологов представляет случай, когда в очаге деформации в процессах обработки металлов давлением деформируемая среда находится в двух состояниях одновременно, упругом и пластичном [4]. Это случай присутствия зоны прилипания или зоны заторможенной пластической деформации. Действительно, контактные силы трения препятствуют перемещению металла на границе с инструментом. Их влияние распространяется на определенную глубину, занимая целую область очага деформации. Исследования показали [5], что остаточные линейные и сдвиговые деформации в данной области очага деформации отсутствуют. Следовательно, имеет место сочетание упругой и пластической деформации. Представляет практический и теоретический интерес определение соотношений указанных зон, их влияние на силовые и кинематические параметры процесса. Для этого возникает необходимость в получении соответствующих друг другу решений задач теории пластичности и упругости. В работах [6–10] предложен новый подход решения задач теории пластичности, связанный с использованием гармонических функций, или, так называемый, метод аргумент функций. Как показал анализ, в рамках этого метода появилась возможность получить решения для упругого и пластичного состояний материала, и сравнить полученные результаты.

Целью работы является обобщение результата целого комплекса практичных задач, которые позволяют расширить возможности решения с точки зрения граничных и начальных условий. Представляется целесообразным получить определенные обобщения решаемых плоских задач теории упругости и пластичности, таким образом, чтобы выявить условия существования решений в виде дифференциальных соотношений, накладываемых на разный конечный результат.

Для решения плоской задачи теории пластичности использовалась следующая постановка задачи:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\,; \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0; \qquad \left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\cdot\tau_{xy}{}^2=4\cdot k^2\,; \quad \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\cdot\tau_{xy}}=\frac{\xi_x-\xi_y}{\gamma'_{xy}}=F_1;$$

$$\xi_x+\xi_y=0;\ \frac{\partial^2\xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma'_{xy}}{\partial y\partial x}\,,$$

где σ_x – нормальное напряжение;

τ_{xy} – касательное напряжение;

k – сопротивление пластической деформации сдвига;

ξ_x , ξ_y , γ'_{xy} – линейные и сдвиговая скорости деформаций.

Решением замкнутой задачи является, в напряжениях:

$$\sigma_x=C_\sigma\cdot exp\,\theta''\cdot cos\,A\Phi+\sigma_0+f(y)+C\,,$$
$$\sigma_y=-C_\sigma\cdot exp\,\theta''\cdot cos\,A\Phi+\sigma_0+f(x)+C\,, \tag{1}$$
$$\tau_{xy}=C_\sigma\cdot exp\,\theta''\cdot sin\,A\Phi\,.$$

при

$$\theta''_x=\mp A\Phi_y,\ \ \theta''_y=\pm A\Phi_x,$$
$$\theta'''_{xx}+\theta'''_{yy}=0,\quad A\Phi_{xx}+A\Phi_{yy}=0, \tag{2}$$

в скоростях деформаций:

$$\xi_x=-\xi_y=C_\xi\cdot exp\,\theta'''\cdot cos\,B_1\Phi\,, \qquad \gamma'_{xy}=2\cdot C_\xi\cdot exp\,\theta'''\cdot sin\,B_1\Phi\,, \tag{3}$$

при

$$\theta'''_x=\mp\hat{A}_1\hat{O}_y\,,\qquad \theta'''_y=\pm\hat{A}_1\hat{O}_x\,,$$
$$\theta'''_{xx}+\theta'''_{yy}=0,\qquad B_1\Phi_{xx}+B_2\Phi_{yy}=0\,. \tag{4}$$

В выражениях (1), (3) присутствуют тригонометрические, экспоненциальные базовые функции и аргумент функции $A\Phi$, θ, на которые наложены ограничения (2), (4) в виде соотношений Коши-Римана и уравнений Лапласа. Необходимо подчеркнуть, что решение задачи теории пластичности получено с помощью гармонических функций, которые нашли широкое применение в теории упругости.

Имеем классическую постановку плоской задачи в теории упругости:

$$\frac{\partial\sigma_{\rm x}}{\partial{\rm x}}+\frac{\partial\tau_{\rm xy}}{\partial{\rm y}}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{\rm yx}}{\partial{\rm x}}+\frac{\partial\sigma_{\rm y}}{\partial{\rm y}}=0,$$
$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=\nabla^2\left(2\cdot\sigma_0\right)=0\,, \tag{5}$$

граничные условия в напряжениях:

$$\tau_n=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot sin2\varphi+\tau_{xy}\cdot cos2\varphi\,, \tag{6}$$

имеем два уравнения равновесия также уравнение неразрывности деформаций в напряжениях [11], где σ_0 – среднее нормальное напряжение или гидростатическое давление.

В постановке задачи теории упругости используются уравнения (5) и граничные условия (6), которые справедливы для плосконапряженного и плоскодеформированного состояний [12].

Упростим выражение (6), принимая:

$$\tau_{xy} = T_i \cdot sin\left(A\Phi\right), \qquad \sigma_x - \sigma_y = 2 \cdot T_i \cdot cos\left(A\Phi\right). \tag{7}$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$\tau_n = -T_i \cdot sin\left(A\Phi - 2\varphi\right), \tag{8}$$

где $T_i = T_i(x, y)$ – функция координат очага деформации, совпадающая по функциональному назначению с интенсивностью касательных напряжений;

A – постоянный коэффициент, определяющий упругое состояние деформируемой среды;

Φ – функция координат, характеризующая контактные касательные напряжения, одна из вводимых в рассмотрение аргумент функций.

Второе выражение (7) следует подтвердить решением задачи и тем самым замкнуть его.

В монографии [13] предлагается, в случае линейности дифференциальных уравнений (5), использовать фундаментальную подстановку. В данном случае не следует ограничивать показатель экспоненты линейной функцией, как это рекомендуется в [13], ее следует "отпустить" и получить выражение или условия существования решения задачи. Принимаем:

$$T_i = C_\sigma \cdot exp(\pm\,\theta) = C_\sigma \cdot \left[ch(\theta) \pm sh(\theta)\right]. \tag{9}$$

Используя (7–9), имеем:

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot exp\left(\theta\right) \cdot sin(A\Phi), \quad \sigma_x - \sigma_y = 2 \cdot C_\sigma \cdot exp\left(\theta\right) \cdot cos\left(A\Phi\right). \tag{10}$$

Следует добавить, что показатель экспоненты θ является неизвестной зависимостью и представляет собой вторую аргумент функцию. Используя подходы решения задач теории упругости при помощи функций комплексных переменных [14–15] в сочетании с методом аргумент функций [6], запишем касательное напряжение (10) в виде:

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) - exp(\theta - iA\Phi)}{2i}. \tag{11}$$

При такой постановке вопроса появляется возможность определить из уравнений равновесия нормальные напряжения в аналитическом виде. Для этого необходимо подставить выражение для касательных напряжений (11) в уравнения равновесия. Частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = C_\sigma \cdot \frac{\left(\theta_y + iA\Phi_y\right) \cdot exp(\theta + iA\Phi) - \left(\theta_y - iA\Phi_y\right) \cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = C_\sigma \cdot \frac{\left(\theta_x + iA\Phi_x\right) \cdot exp(\theta + iA\Phi) - \left(\theta_x - iA\Phi_x\right) \cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i}.$$

После подстановки производных в дифференциальные уравнения равновесия и разделения переменных получим:

$$d\sigma_x = -C_\sigma \cdot \frac{\left(\theta_y + iA\Phi_y\right) \cdot exp(\theta + iA\Phi) - \left(\theta_y - iA\Phi_y\right) \cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i} \cdot dx,$$

$$d\sigma_y = -C_\sigma \cdot \frac{(\theta_x + iA\Phi_x)\cdot exp(\theta + iA\Phi) - (\theta_x - iA\Phi_x)\cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i} dy .$$

Интегрировать последние выражения не представляется возможным. Однако если осуществить переход от одной переменной интегрирования к другой, используя условие аналитичности стоящих в скобках функций, что имеет место в (1):

$$\theta_x = -A\Phi_y, \quad \theta_y = A\Phi_x,$$

получим:

$$d\sigma_x = -C_\sigma \cdot \frac{(A\Phi_x - i\theta_x)\cdot exp(\theta + iA\Phi) - (A\Phi_x + i\theta_x)\cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i} \cdot dx ,$$

$$d\sigma_y = -C_\sigma \cdot \frac{(-A\Phi_y + i\theta_y)\cdot exp(\theta + iA\Phi) - (-A\Phi_y - i\theta_y)\cdot exp(\theta - iA\Phi)}{2i} dy .$$

Как видно, имеем дифференциальные соотношения, связывающиеся одной переменной. Можно показать, что:

$$A\Phi_x - i\theta_x = \frac{\theta_x + iA\Phi_x}{i}, \qquad A\Phi_x + i\theta_x = -\frac{\theta_x - iA\Phi_x}{i},$$

$$-A\Phi_y + i\theta_y = -\frac{\theta_y + iA\Phi_y}{i}, \qquad -A\Phi_y - i\theta_y = \frac{\theta_y - iA\Phi_y}{i}.$$

После подстановки полученных выше зависимостей, интегрирования по частям,

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) + exp(\theta - iA\Phi)}{2} + C,$$

$$\sigma_y = -C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) + exp(\theta - iA\Phi)}{2} + C .$$

Переходя к вещественным функциям, имеем:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + C, \qquad \sigma_y = -C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + C . \tag{12}$$

Подставляя выражения (12) в разность нормальных напряжений, убеждаемся, что соотношения (10) выполняются. Это подтверждает достоверность используемых граничных условий (6–8). Если интегрированием определялись не напряжения, а девиаторы напряжений:

$$s_x = \sigma_x - \sigma_0, \qquad s_y = \sigma_y - \sigma_0,$$

согласно [3], то:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + \sigma_0, \qquad \sigma_y = -C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + \sigma_0 . \tag{13}$$

Девиаторные составляющие можно записать в виде:

$$s_x = \sigma_x - \sigma_0 - f(y), \qquad s_y = \sigma_y - \sigma_0 - f(x),$$

тогда

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + \sigma_0 + f(y),$$

$$\sigma_y = -C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi + \sigma_0 + f(x), \tag{14}$$

при

$$\theta_x = -A\Phi_y,\ \ \theta_y = A\Phi_x,\quad \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0,\ \ A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0. \qquad (15)$$

Выше приведенные соотношения Коши-Римана аргумент функций полностью замыкают решение задачи и по граничным условиям (8), и уравнениям равновесия (1). Вводимые в рассмотрение неизвестные функции θ и $A\Phi$ (9–11) определяются уравнениями Лапласа, согласно (15), что вносит достаточную определенность для их нахождения.

Однако задача не завершена, т.к. не определено среднее нормальное напряжения, входящее в (13), (14). В постановке задачи дифференциальное уравнение, определяющее среднее нормальное напряжение, является уравнением неразрывности деформаций. Анализ показывает, что для более полного удовлетворения граничным и очевидным условиям в зоне упругого деформирования подойдет выражение, которое является основой решения для нормальных напряжений (13), (14). В этом случае ставится задача: определить, при каких значениях аргумент функций условие неразрывности (5) будет удовлетворено. Запишем (5) через функцию комплексной переменной:

$$\nabla^2\left(C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) + exp(\theta - iA\Phi)}{2}\right) = 0.$$

Распишем производные по координатам:

$$\frac{\partial^2\left[C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) + exp(\theta - iA\Phi)}{2}\right]}{\partial x^2} =$$

$$= C_\sigma \frac{\left[\left(\theta_{xx} + iA\Phi_{xx}\right) + \left(\theta_x + iA\Phi_x\right)^2\right]\cdot exp\left(\theta + iA\Phi\right) +}{2}\ldots$$

$$\ldots\frac{+\left[\left(\theta_{xx} - iA\Phi_{xx}\right) + \left(\theta_x - iA\Phi_x\right)^2\right]\cdot exp\left(\theta - iA\Phi\right)}{2},$$

$$\frac{\partial^2\left[C_\sigma \cdot \frac{exp(\theta + iA\Phi) + exp(\theta - iA\Phi)}{2}\right]}{\partial y^2} =$$

$$= C_\sigma \frac{\left[\left(\theta_{yy} + iA\Phi_{yy}\right) + \left(\theta_y + iA\Phi_y\right)^2\right]\cdot exp\left(\theta + iA\Phi\right) +}{2}\ldots$$

$$\ldots\frac{+\left[\left(\theta_{yy} - iA\Phi_{yy}\right) + \left(\theta_y - iA\Phi_y\right)^2\right]\cdot exp\left(\theta - iA\Phi\right)}{2}.$$

После подстановки производных в уравнение неразрывности деформаций и сокращений, получим:

$$exp(\theta + iA\Phi)\cdot\left[\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) + \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)\cdot i + \left(\theta_x + iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y + iA\Phi_y\right)^2\right] +$$

$$+ exp(\theta - iA\Phi)\cdot\left[\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) - \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)\cdot i + \left(\theta_x - iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y - iA\Phi_y\right)^2\right] = 0 \qquad (16)$$

Операторы, стоящие возле экспонент, содержат одинаковые вторые производные по координатам и нелинейности. Если в силу каких-то причин операторы равны нулю, то имеет место тождество. Покажем это. Распишем нелинейности в операторах и перегруппируем их:

$$\left(\theta_x + iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y + iA\Phi_y\right)^2 =$$
$$= \left(\theta_x + A\Phi_y\right)\cdot\left(\theta_x - A\Phi_y\right) + 2i\left(\theta_x \cdot A\Phi_x + \theta_y \cdot A\Phi_y\right) + \left(\theta_y + A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_y - A\Phi_x\right),$$
$$\left(\theta_x - iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y - iA\Phi_y\right)^2 = \left(\theta_x + A\Phi_y\right)\cdot\left(\theta_x - A\Phi_y\right) - 2i\left(\theta_x \cdot A\Phi_x + \theta_y \cdot A\Phi_y\right) +$$
$$+ \left(\theta_y + A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_y - A\Phi_x\right).$$

Принимая в произведениях скобок одну равную нулю, уходим от нелинейности, тогда:

$$\theta_x = -A\Phi_y, \theta_y = A\Phi_x.$$

Данные соотношения представляют собой соотношения Коши-Римана, что имело место при решении дифференциальных уравнений равновесия упругой задачи (5) и решения плоской задачи теории пластичности (1). Подставляя их, автоматически превращается в нуль выражение для обоих операторов:

$$\theta_x \cdot A\Phi_x + \theta_y \cdot A\Phi_y = -A\Phi_y \cdot A\Phi_x + A\Phi_x \cdot A\Phi_y = 0.$$

После этого уравнение (16) существенно упрощается и принимает вид:

$$\exp(\theta + i\text{A}\Phi)\cdot\left[\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) + \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)\cdot i\right] +$$
$$+ \exp(\theta - i\text{A}\Phi)\cdot\left[\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) - \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)\cdot i\right] = 0.$$

Из соотношений Коши-Римана определяем вторые производные, которые показывают, что:

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0,\ \ A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0.$$

Уравнение неразрывности деформаций тождественно удовлетворяется. Следовательно, решением уравнения неразрывности деформаций является:

$$\sigma_0 = n \cdot C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos\,A\Phi, \tag{17}$$

при $\theta_x = -A\Phi_y$, $\theta_y = A\Phi_x$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$, где n – любое число.

На решение (17) накладываются те же ограничения, что и для (13–14), при тех же параметрах. Следует подчеркнуть, что решение уравнения неразрывности деформаций допускает присутствия в выражении среднего нормального напряжения одновременно двух экспонент с противоположными знаками аргумент функции θ. Покажем это:

$$\sigma_0 = n \cdot C_\sigma \cdot exp\left(-\theta\right) \cdot cos\,A\Phi = n \cdot C_\sigma \cdot \frac{exp\left(-\theta + iA\Phi\right) + exp\left(-\theta - iA\Phi\right)}{2}.$$

Подставляя в уравнение неразрывности деформаций, имеем:

$$\exp(-\theta + i\text{A}\Phi)\cdot\left[-\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) + \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)\cdot i + \left(\theta_x - iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y - iA\Phi_y\right)^2\right] +$$
$$+ \exp(-\theta - i\text{A}\Phi)\cdot\left[-\left(\theta_{xx} + \theta_{yy}\right) - \left(A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}\right)i + \left(\theta_x + iA\Phi_x\right)^2 + \left(\theta_y + iA\Phi_y\right)^2\right] = 0. \tag{18}$$

Сопоставляя (16) и (18), убеждаемся, что операторы перед экспонентами противоположного знака в сравнении с функцией θ, с точки зрения решения практически не изменились.

Таким образом, поставлена и решена плоская задача теории упругости, выявлены обобщающие соотношения (15), определяющие условия существования заданного класса решений через инварианты дифференциальных соотношений аргумент функций.

В общем можно записать:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos A\Phi + \sigma_0, \qquad \sigma_y = -C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos A\Phi + \sigma_0,$$
$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot exp(\theta) \cdot sin(A\Phi), \qquad \sigma_0 = n \cdot C_\sigma \cdot exp\,\theta \cdot cos A\Phi, \tag{19}$$

при $\theta_x = -A\Phi_y$, $\theta_y = A\Phi_x$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$.

Анализ показывает, что решение (19) может быть в дальнейшем усилено и представлено в виде:

$$\sigma_x = exp\,\theta\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0 = \left[ch(\theta) + sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0;$$
$$\sigma_y = -exp\,\theta\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0 = -\left[ch(\theta) + sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0; \tag{20}$$
$$\tau_{xy} = exp(\theta) \cdot \left(C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi\right) = \left[ch(\theta) + sh(\theta)\right]\left(C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi\right);$$
$$\sigma_0 = \pm n \cdot exp\,\theta\left(C_1 cos A\Phi \mp C_2 sin A\Phi\right) = \pm n \cdot \left[ch(\theta) + sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi \mp C_2 sin A\Phi\right)$$

при $\theta_x = -A\Phi_y$, $\theta_y = A\Phi_x$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$.

Если в показателе экспоненты взят знак минус, $\exp(-\theta)$, тогда структура формул (20) несколько изменится:

$$\sigma_x = -exp(-\theta)\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0 = -\left[ch(\theta) - sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0;$$
$$\sigma_y = exp(-\theta)\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0 = \left[ch(\theta) - sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi - C_2 sin A\Phi\right) + \sigma_0; \tag{21}$$
$$\tau_{xy} = exp(-\theta)\left(C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi\right) = \left[ch(\theta) - sh(\theta)\right]\left(C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi\right);$$
$$\sigma_0 = \pm n \cdot exp(-\theta)\left(C_1 cos A\Phi \mp C_2 sin A\Phi\right) = \pm n \cdot \left[ch(\theta) - sh(\theta)\right]\left(C_1 cos A\Phi \mp C_2 sin A\Phi\right)$$

при $\theta_x = A\Phi_y$, $\theta_y = -A\Phi_x$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$.

Как частный вариант, выражения (21) можно рассматривать как функцию напряжений и его можно привлечь для сравнительного анализа. Действительно, бигармоническое уравнение для плоской задачи можно представить:

$$\nabla^4 \varphi = \nabla^2\left(\nabla^2 \varphi\right) = 0.$$

Как было показано выше: $\nabla^2(\sigma_0) = 0$.

Следовательно: $\nabla^2\left[\nabla^2(\sigma_0)\right] = \nabla^2[0] = 0$.

В работе [12] показаны решения плоской задачи при помощи тригонометрических рядов. Функция напряжений φ имеет вид:

$$\varphi = sin(\alpha x) \cdot \left[C_3 \cdot ch(\alpha \cdot y) + C_4 \cdot sh(\alpha \cdot y) + C_5 \cdot y \cdot ch(\alpha \cdot y) + C_6 \cdot y \cdot sh(\alpha \cdot y)\right]. \tag{22}$$

Приведем выражения (21) и (22) в сопоставимый вид, т. е. $C_5 = C_6 = 0$, $A\Phi = \alpha x$, $\theta = \alpha y$, $n = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = -1$. Должны быть справедливы соотношения Коши-Римана и уравнения Лапласа, которые были получены настоящим решением:

$$\theta_x = -A\Phi_y,\ \theta_y = A\Phi_x,\ \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0,\ A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0.$$

Проверим выполнение указанных обобщений. Действительно $\theta_x = 0$, $A\Phi_y = 0$, $\theta_y = \alpha$, $A\Phi_x = \alpha$. Тогда соотношения Коши-Римана для известного решения также имеют место $0 = -0$, $\alpha = \alpha$, т. е. полученные в работе [12] функции являются частным решением по отношению к (21). Это следует из того, что функции $\alpha \cdot x$ и $\alpha \cdot y$ являются простейшим решением уравнения Лапласа, которое допускает целый класс гармонических функций в различных сочетаниях. Аргумент функции не обязательно должны быть линейными и могут, зависеть одновременно от нескольких переменных. К примеру, более сложной функцией $A\Phi$ является функция второго порядка:

$$A\Phi = \alpha \cdot x \cdot y.$$

Она удовлетворяет уравнению Лапласа и, через соотношение Коши-Римана, определяет вторую аргумент функцию θ, вида:

$$\theta = -\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(x^2 - y^2\right).$$

Сопоставляя решения (1), (2) и (20), (21), полученные одним методом (методом аргумент функций), следует отметить, что между ними существует достаточно очевидное соответствие. Используются одинаковые базовые функции, между аргумент функциями определены одни и те же дифференциальные соотношения Коши-Римана, показан одинаковый тип аргумент функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Принципиальным отличием являются разные граничные условия, обеспечивающие решения упругой и пластической задач механики сплошной среды.

ВЫВОДЫ

На базе методов аргумент функций и функций комплексной переменной показан новый подход решения плоской задачи теории упругости.

Показано соответствие решений плоской задачи теории упругости и пластичности.

Предложенные аналитические решения механики сплошной среды могут быть использованы при анализе напряженного состояния металла в очаге деформации, находящегося одновременно в двух состояниях упругом и пластичном.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ, 1949. – 376 с.

2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука,1969. – 420 с.

3. Малинин М. М. Прикладная теория пластичности и ползучести / М. М. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 398 с.

4. Павлов И. М. Теория прокатки / И. М. Павлов. – М. : Металлургиздат, 1950. – 511 с.

5. Тарновский И. Я. Деформации и усилия при обработке металлов давлением / И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго. – М. : Машгиз, 1953. – 304 с.

6.Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В.Чигиринский // Изв. вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.

7. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // Обработка материалов давлением : сб. науч. трудов. – Краматорск : ДГМА, 2009. – № 1 (20). – С. 41–49.

8. Chigurinski V. V. The study of stressed and deformed metal state under condition of no uniform plastic medium flow / V. V. Chigurinski // Metalurgija. – Zagreb. – 1999. – Vol. 38, Br. 1. – P. 31–37.

9. Chigirinsky V. V. Development of dynamic model of transients in mechanical systems using argument-functions / V. Chigirinsky, A. Putnoki // Easten-European Journal of Technologies. Applied mechanics. – 2017. – № 3/7(87). – P. 11–21.

10. Производство тонкостенного проката специального назначения / В. В. Чигиринский, Ю. С. Кресанов, А. Я. Качан и др. – Запорожье, 2014. – 285 с.

11. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.

12. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности / С. Н. Никифоров. – М. : ГИЛСИ, 1955. – 284 с.

13. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

14. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко. – Л. : ОНТИ, 1934. – 451 с.

15. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 547 с.

REFERENCES

1. Il'jushin A. A. Plastichnost' / A. A. Il'jushin. – M. : OGIZ GOSTEHIZDAT, 1949. – 376 s.

2. Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti / L. M. Kachanov. – M. : Nauka,1969. – 420 s.

3. Malinin M. M. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti / M. M. Malinin. – M. : Mashino-stroenie, 1975. – 398 s.

4. Pavlov I. M. Teorija prokatki / I. M. Pavlov. – M. : Metallurgizdat, 1950. – 511 s.

5. Tarnovskij I. Ja. Deformacii i usilija pri obrabotke metallov davleniem / I. Ja. Tarnovskij, A. A. Pozdeev, O. A. Ganago. – M. : Mashgiz, 1953. – 304 s.

6.Chigirinskij V. V. Metod reshenija zadach teorii plastichnosti s ispol'zovaniem garmonicheskih funkcij / V. V.Chigirinskij // Izv. vuzov. Chernaja metallurgija. – 2009. – № 5. – S. 11–16.

7. Chigirinskij V. V. O novyh podhodah reshenija zadach teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij // Ob-rabotka materialov davleniem : sb. nauch. trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2009. – № 1 (20). – S. 41–49.

8. Chigurinski V. V. The study of stressed and deformed metal state under condition of no uniform plastic medium flow / V. V. Chigurinski // Metalurgija. – Zagreb. – 1999. – Vol. 38, Br. 1. – P. 31–37.

9. Chigirinsky V. V. Development of dynamic model of transients in mechanical systems using argument-functions / V. Chigirinsky, A. Putnoki // Easten-European Journal of Technologies. Applied mechanics. – 2017. – № 3/7(87). – P. 11–21.

10. Proizvodstvo tonkostennogo prokata special'nogo naznachenija / V. V. Chigirinskij, Ju. S. Kresa-nov, A. Ja. Kachan i dr. – Zaporozh'e, 2014. – 285 s.

11. Bezuhov N. I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti / N. I. Bezuhov. – 2-e izd., ispr. i dop. – M. : Vyssh. shk., 1968. – 512 s.

12. Nikiforov S. N. Teorija uprugosti i plastichnosti / S. N. Nikiforov. – M. : GILSI, 1955. – 284 s.

13. Tihonov A. N. Uravnenija matematicheskoj fiziki / A. N. Tihonov, A. A. Samarskij. – M. : Izd-vo MGU, 1999. – 799 s.

14. Timoshenko S. P. Teorija uprugosti / S. P. Timoshenko. – L. : ONTI, 1934. – 451 s.

15. Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti / N. I. Mushelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 547 s.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., пом. дир. ЧАО «КрКЗ»;

Науменко Е. Г. – ст. преп. НТУ «Днепровская политехника».

ЧАО «КрКЗ» – Частное акционерное общество «Кременчугский колесный завод», г. Кременчуг.

НТУ «Днепровская политехника» – Национальный технический университет «Днепровская политехника», г. Днепр.

E-mail: val.chig1948@gmail.com; elenanaumenko1971@gmail.com.

Статья поступила в редакцию 11.03.2019 г.