РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 539.375+621.7.01 DOI: 10.37142/2076-2151/2020-1(50)3

Алюшин Ю. А.

СУПЕРПОЗИЦИЯ ДВИЖЕНИЙ С НЕОБРАТИМОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Современные тенденции развития технологии и оборудования для обработки металлов предусматривают переход от простых схем к совмещению операций с использованием сложных напряженных состояний и энергоемкого оборудования [1–4]. Резервы существующих и разработка новых технологических процессов должны сопровождаться детальным анализом напряженного и деформированного состояний обрабатываемого материала в зависимости от конструктивных особенностей инструмента, температурно-скоростных режимов с учетом возможности изменения свойств материала [5–6]. Анализ таких процессов можно упростить, используя суперпозицию и известные решения для простых схем, совмещаемых в планируемом технологическом процессе [7–8].

Суперпозиция предполагает наложение нескольких процессов, в результате чего получается новый, отличающийся от совмещаемых, но непосредственно связанный с ними. В классической механике для суперпозиции движений применяют правило векторного сложения скоростей и ускорений, когда аргументами уравнений являются переменные Эйлера. Интегрирование по времени получаемых результатов связано с определенными трудностями и не способствует широкому распространению такого варианта суперпозиции при решении прикладных задач.

Переход к описанию движения в форме Лагранжа существенно снижает математические трудности преобразования уравнений осадки или линейного растяжения, сдвига, кручения, изгиба в уравнения более сложных процессов, совмещающих упомянутые с последующим анализом особенностей пластического течения, возможностей оптимизации процесса по энергосиловым параметрам или однородности деформированного состояния в получаемых изделиях [9–10]. Точность результата можно оценить по выполнению условия постоянства объема, которое обычно предполагается для области необратимых деформаций.

Цель работы – обоснование методики суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа, рекомендуемой для технологических операций обработки давлением, с иллюстрацией на примерах с однородным и неоднородным напряженным состоянием.

Любое движение сплошной среды можно описать уравнениями в форме Эйлера $\alpha_p = \alpha_p(x_i, t)$ или Лагранжа [10–11]:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t), \tag{1}$$

где t – время, $x_i \in (x, y, z)$, $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ – переменные Эйлера и Лагранжа, соответственно.

Учитывая, что физические закономерности формулируются для материальных частиц, а не для точек пространства, предпочтение следует отдать форме Лагранжа [12]. Такое описание позволяет следить за историей изменения внешних воздействий, которые отражаются на движении частиц. Уравнения (1) несут всю информацию об изменении кинематических, силовых, энергетических и иных характеристик частиц, в том числе об изменении свойств материала, например, за счет деформационного или скоростного упрочнения, если известны физические свойства материала в исходном состоянии и среды, в которой происходит движение [6–7].

Не менее важно, что результат суперпозиции может быть получен значительно проще, если составляющие движения записаны в форме Лагранжа, а переменные Эйлера и Лагранжа совпадают в исходном состоянии $x_i(\alpha_p, t=0) = \alpha_i$. В этом случае совмещение движений сводится к замене координат Лагранжа внешнего движения на выражения для соответствующих переменных Эйлера внутреннего движения [13–14]. Иными словами, если известны два возможных вида движения – внутреннее (вложенное):

$$x_i^i = x_i^i(\alpha_p, t) \tag{2}$$

и внешнее (наложенное):

$$x_i^e = x_i^e(\alpha_p, t), \tag{3}$$

уравнения совмещенного движения при последовательном или одновременном их протекании $x_i = x_i(\alpha_p, t)$ совпадают с уравнениями внешнего движения после замены переменных Лагранжа соответствующими уравнениями для переменных Эйлера внутреннего движения:

$$x_i(\alpha_p, t) = x_i^e(x_i^i(\alpha_p, t), t). \tag{4}$$

Вложенные и наложенные движения аналогичны переносным и относительным в классической механике, но отличаются обязательным использованием единой системы координат, тогда как в классической механике возможно применение разных систем [11–12].

Простоту принципа можно объяснить возможностью перехода к новым переменным Лагранжа, которые совпадают с переменными Эйлера в каждый момент времени. Действительно, в общем случае процесс движения можно рассматривать состоящим из последовательности этапов. Переменные Лагранжа могут быть введены как на каждом этапе, так и единые для нескольких этапов.

Рассмотрим два последовательных этапа в единой системе координат. Пусть первый ограничен интервалом времени $0 \le t \le t_1$ и уравнения движения на первом этапе имеют вид:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t) \text{ при } 0 \le t \le t_1.$$

Эйлеровы координаты в конечный момент рассматриваемого этапа ($t = t_1$) выделим обозначениями:

$$\xi_i = \xi_i(\alpha_p, t). \tag{5}$$

При описании движения на втором этапе $t_1 \le t \le t_2$ можно в момент t_1 ввести новый отсчет времени $t' = t - t_1 \ge 0$ и новые координаты Лагранжа $\xi_k \in (\xi, \eta, \zeta)$, которые совпадают с координатами частиц в момент времени t_1. Это позволяет описать дальнейший процесс движения в виде уравнений:

$$x_i = x_i(\xi_k, t'), \qquad \xi_k \in (\xi, \eta, \zeta), \qquad \text{при } 0 \le t' \le t_2 - t_1. \tag{6}$$

На первом и втором этапах матрицы производных от переменных Эйлера по переменным Лагранжа соответственно будут:

$$x_{i,\alpha_p} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_p} = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma \end{pmatrix}, \qquad x_{i,\xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Уравнения (6) можно распространить на второй этап и без изменения системы отсчета времени, достаточно ограничить временной интервал этого этапа в первоначальной шкале времени:

$$x_i = x_i(\xi_k, t) \qquad \text{при } t_1 \le t \le t_2.$$

Чтобы найти производные $x_{i,\alpha_p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p$ на втором этапе в пространстве переменных Лагранжа α_p с учетом движения на первом этапе, переменные ξ_k следует рассматривать, в соответствии с соотношениями (5), функциями координат α_p первого этапа. Тогда для второго этапа по общим правилам дифференцирования неявно заданных функций [15] получаем:

$$x_\alpha = x_\xi \xi_\alpha + x_\eta \eta_\alpha + x_\zeta \zeta_\alpha, \qquad x_\beta = x_\xi \xi_\beta + x_\eta \eta_\beta + x_\zeta \zeta_\beta \qquad x_\gamma = x_\xi \xi_\gamma + x_\eta \eta_\gamma + x_\zeta \zeta_\gamma$$

или, в сокращенной записи для любой из координат,

$$x_{i,\alpha_p} = x_{i,\xi_k} \xi_{k,\alpha_p} .$$

Таким образом, матрица производных в пространстве переменных Лагранжа x_{i,α_p}, принятых в начале первого этапа, на каждом последующем этапе определяется по правилу перемножения матриц [15], причём левым множителем является матрица последующего этапа, а правым множителем – матрица предшествующего этапа.

Рассмотренный принцип не противоречит общепринятому и его следствием является векторное сложение как скоростей, так и ускорений накладываемых движений в каждый момент времени. Уравнения совмещенного движения (4) можно рассматривать как неявно заданные функции времени и переменных Лагранжа α_p. С учетом правил дифференцирования таких функций и геометрического смысла переменных Лагранжа ($\alpha = x^i$, $\beta = y^i$, $\gamma = z^i$) для компонент скорости совмещенного движения получаем:

$$x_t = x_t^e + x_\alpha^e x_t^i + x_\beta^e y_t^i + x_\gamma^e z_t^i, \qquad y_t = y_t^e + y_\alpha^e x_t^i + y_\beta^e y_t^i + y_\gamma^e z_t^i, \qquad z_t = z_t^e + z_\alpha^e x_t^i + z_\beta^e y_t^i + z_\gamma^e z_t^i$$

или, сокращенно, с учетом правила суммирования по повторяющемуся индексу,

$$x_{i,t} = x_{i,t}^e + x_{i,p}^e x_{p,t}^i ,$$

где первое слагаемое и левый множитель относятся к внешнему (наложенному) движению (3), тогда как правый множитель определяется внутренним (вложенным) движением (2). Полученные соотношения геометрически можно интерпретировать как векторную сумму [15] скоростей вложенного и наложенного движений: первое слагаемое определяет скорость внешнего (переносного) движения, второе – преобразование скорости внутреннего (относительного) движения за счет внешнего. В этом можно убедиться на конкретных примерах с различными видами движений. Например, для вложенного поступательного:

$$x^i = \alpha + u(t)\,, \qquad y^i = \beta + v(t)\,, \qquad z^i = \gamma + w(t) \tag{8}$$

и наложенного вращательного движения

$$x^e = \alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi\,, \qquad y^e = \alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi\,, \qquad z^e = \gamma\,, \tag{9}$$

в результате совмещения получаем новое движение с уравнениями

$$x = (\alpha + u)\cos\Delta\varphi - (\beta + v)\sin\Delta\varphi\,, \qquad y = (\alpha + u)\sin\Delta\varphi + (\beta + v)\cos\Delta\varphi\,, \qquad z = \gamma + w\,,$$

и компонентами скорости

$$x_t = -\varphi_t y + u_t\cos\Delta\varphi - v_t\sin\Delta\varphi\,, \qquad y_t = \varphi_t x + u_t\sin\Delta\varphi + v_t\cos\Delta\varphi\,, \qquad z_t = w_t\,. \tag{10}$$

Первые слагаемые совпадают с компонентами скорости внешнего движения (9), а остальные соответствуют преобразованиям компонент скорости вложенного движения (8) с учетом поворота тела за счет внешнего движения.

Уравнения для компонент ускорения могут быть получены дифференцированием по времени соотношений (10)

$$x_{tt} = -\varphi_{tt} y - \varphi_t y_t + u_{tt}\cos\Delta\varphi - v_{tt}\sin\Delta\varphi - \varphi_t(u_t\sin\Delta\varphi + v_t\cos\Delta\varphi)\,,$$
$$y_t = \varphi_{tt} x + \varphi_t x_t + u_{tt}\sin\Delta\varphi + v_{tt}\cos\Delta\varphi + \varphi_t(u_t\cos\Delta\varphi - v_t\sin\Delta\varphi)\,, \qquad z_{tt} = w_{tt}\,.$$

Правило геометрического сложения ускорений соблюдается.

При обработке давлением оба совмещаемых процесса, например в случае осадки с кручением, могут происходить одновременно, выбор внутреннего и внешнего движений неоднозначен, любое может быть принято за внешнее. Даже если уравнения совмещенного движения в двух вариантах различны по форме, результаты численного расчета любых кинематических и других (силовых или энергетических) характеристик практически совпадают. Поэтому можно рекомендовать выбор внешнего и внутреннего движений так, чтобы итоговые уравнения совмещенного движения имели более простой вид.

Принцип суперпозиции допускает его многократное применение без нарушения правила геометрического суммирования скоростей и ускорений для совмещаемых движений. Последовательность реализации каждого из простых движений может быть определена специфическим параметром времени, например углом поворот тела или его перемещением в указанном направлении. Единая для обоих движений система координат $x_i \in (x, y, z)$ исключает проблемы неинерциальных систем, возникающие в классической механике.

Уравнения движения частиц тела позволяют найти любые кинематические, а с учетом физических свойств энергетические, силовые и другие локальные и интегральные по времени и объему характеристики, необходимые для решения любых вопросов, связанных с устойчивостью движения, изменением свойств или опасностью разрушения тел.

Ниже для рассматриваемых процессов приведены уравнения движения (1) и тензоры (7) производных от переменных Эйлера по переменным Лагранжа $x_{i,\alpha_p} \equiv \partial x_i / \partial\alpha_p$, которые определяют основные кинематические характеристики процесса, включая инварианты

$$I_1 = x_\alpha + y_\beta + z_\gamma \quad, \qquad I_2 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2 + y_\gamma^2 + z_\alpha^2 + z_\beta^2 + z_\gamma^2\,, \quad I_3 = |x_{i,p}| = R = \delta V/\delta V_0\,.$$

Инвариант I_2 определяет изменение энергии частиц за счет деформации [4], I_3 – отношение объёмов частицы в текущем δV и исходном δV_0 состояниях. При необратимых деформациях принято считать объем неизменным, тогда третий (кубический) инвариант остается постоянным $I_3 = 1$.

Квадратичный инвариант I_2 может быть представлен в виде суммы слагаемых [10, 14]

$$\xi_6 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\alpha^2 + ...z_\gamma^2 = e_\alpha^2 + e_\beta^2 + e_\gamma^2 = \Gamma_e^2 = 3e^2 + \Gamma^2 .$$

В правой части величины e и Γ определяют среднее значение отношения длин ребер:

$$e = (e_\alpha + e_\beta + e_\gamma)/3$$

и среднеквадратическое отклонение относительных длин ребер e_p от среднего значения e

$$\Gamma^2 = (e_\alpha - e)^2 + (e_\beta - e)^2 + (e_\gamma - e)^2 ,$$

где $e_p \in (e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)$ – отношения длин ребер до δl_0 и после δl деформации, первоначально ориентированных в направлении соответствующих осей,

$$e_p^2 = (\delta l / \delta l_0)_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2, \qquad p \in (\alpha, \beta, \gamma) .$$

В связи с громоздкостью уравнений для интенсивности скорости деформации сдвига при описании движения в форме Лагранжа, в работе [9] рекомендован ее аналог в виде субстанциональной производной $\Gamma_t \equiv d\Gamma / dt$, который для идеальной жесткопластической среды при $T_s = const$ определяет удельную мощность деформации:

$$\omega = T_s \, | \Gamma_t \, | .$$

В уравнении использован модуль скорости изменения среднеквадратического отклонения $| \Gamma_t |$, так как при необратимых деформациях любые изменения формы частиц могут происходить только за счет энергии внешних воздействий. Интеграл

$$\Gamma_i = \Lambda = \int | \Gamma_t \, | \, dt \tag{11}$$

согласуется с используемой в теории пластичности мерой Одквиста [7–10].

Принцип суперпозиции обеспечивает выполнение кинематических особенностей движения. Если совмещаемые движения соответствуют закону сохранения энергии, получаемое в результате суперпозиции движение не обязательно ему будет соответствовать. В каждом случае нужно проводить дополнительную соответствующую проверку.

Из закона сохранения энергии и связанного с ним условия инвариантности энергии по отношению к выбору системы отсчета скоростей движение материальных частиц должно удовлетворять дифференциальному уравнению [16–17]

$$x_t \left(\frac{\partial \tau_{px}}{\partial \alpha_p} - \rho_0 x_{tt} \right) + y_t \left(\frac{\partial \tau_{py}}{\partial \alpha_p} - \rho_0 y_{tt} \right) + z_t \left(\frac{\partial \tau_{pz}}{\partial \alpha_p} + \rho_0 g - \rho_0 z_{tt} \right) = 0 , \tag{12}$$

где τ_{pi} – напряжения, ρ_0 – плотность материала, g – ускорение свободного падения, $x_{i,t} \equiv \partial x_i / \partial t$, $x_{i,tt} \equiv \partial^2 x_i / \partial t^2$ – компоненты скорости и ускорения, соответственно.

Для абсолютно твердых тел ограничения по совмещаемым движениям отсутствуют, любое совмещенное движение, например, звеньев роботизированных комплексов, может быть реализовано за счет полученных на основе уравнений динамики внешних воздействий.

В области упругой деформации реализуемые в действительности совмещенные движения, в связи с существенными математическими трудностями при использовании соотношений классической теории упругости, могут быть получены в аналитической форме только с применением энергетической модели механики с одним модулем упругости, в которой понятие напряжений становится избыточным, так как они отличаются от производных x_{i,α_p} постоянным множителем, равным удвоенному модулю упругости κ:

$$\tau_{pi} = 2\kappa x_{i,\alpha_p} . \tag{13}$$

В энергетическая модели механики средние напряжения характеризуют объемную плотность энергии частиц [11–12] в новой шкале с начальным значением $\sigma_0 = 2\kappa$. При таком предположении уравнение (12) преобразуется к виду:

$$x_t\left(\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial \alpha_p} - x_{tt}/\lambda_0^2\right) + y_t\left(\frac{\partial y_{\alpha_p}}{\partial \alpha_p} - y_{tt}/\lambda_0^2\right) + z_t\left(\frac{\partial z_{\alpha_p}}{\partial \alpha_p} - z_{tt}/\lambda_0^2\right) = 0, \tag{14}$$

где коэффициент λ_0 характеризует физические свойства материала $\lambda_0^2 = 2\kappa/\rho_0$. Получаемые при таких предположениях решения не противоречат классической механике для любых типов задач [16–18].

В классической механике рассматривают каждую скобку из уравнения (12) отдельно, при отсутствии ускорений отсюда следуют уравнения равновесия $\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p = 0$ [11–12]. Как будет показано ниже, оценивать возможность реализации совмещаемых движений по дифференциальным уравнениям равновесия нецелесообразно, так как они допускают потерю возможных правильных решений.

Предположение (13) преобразует уравнения равновесия в уравнения Лапласа:

$$x_{i,\alpha\alpha} + x_{i,\beta\beta} + x_{i,\gamma\gamma} = 0 \qquad \text{или} \qquad \partial x_{i,\alpha_p}/\partial\alpha_p = 0 . \tag{15}$$

Если выполняются уравнения Лапласа, тогда выполняется и уравнение (14), они обеспечивают достаточные условия для выполнения закона сохранения энергии, но не являются необходимыми. Например, при скручивании стержня с деформациями сдвига в соответствии с уравнениями:

$$x = \alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi, \quad y = \alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi, \quad z = \gamma, \qquad \Delta\varphi(t) = \gamma\theta(t), \tag{16}$$

деформация тоже является однородной, но два из трех уравнений (15) не выполняются из-за вторых производных по переменной γ:

$$x_{\gamma\gamma} = -\theta^2(\alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi) = -\theta^2 x, \quad y_{\gamma\gamma} = -\theta^2(\alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi) = -\theta^2 y .$$

Однако, если принять во внимание производные от координат по времени

$$x_t = -\varphi_t(\alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi) = -\varphi_t y, \qquad y_t = \varphi_t(\alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi) = \varphi_t x,$$

уравнение (14) выполняется

$$-\varphi_t y(-\theta^2 x) + \varphi_t x(-\theta^2 y) = 0 .$$

Совмещение двух процессов скручивания (16) и растяжения

$$x = \alpha(1-\mu\varepsilon_z), \qquad y = \beta(1-\mu\varepsilon_z), \qquad z = \gamma(1+\varepsilon_z),$$

не нарушает однородного деформированного состояния, уравнения движения в соответствии с принципом суперпозиции принимают одинаковый вид при выборе любого движения в качестве внешнего

$$x = \alpha(1-\mu\varepsilon_z)\cos\Delta\varphi - \beta(1-\mu\varepsilon_z)\sin\Delta\varphi, \tag{17}$$

$$y = \alpha(1-\mu\varepsilon_z)\sin\Delta\varphi + \beta(1-\mu\varepsilon_z)\cos\Delta\varphi, \qquad z = \gamma(1+\varepsilon_z), \qquad \Delta\varphi = \gamma\theta(t).$$

Как и в рассмотренном выше случае, вторые производные по γ зависят от координат

$$x_{\gamma\gamma} = -\theta^2(1-\mu\varepsilon_z)(\alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi) = -\theta^2 x,$$
$$y_{\gamma\gamma} = -\theta^2(1-\mu\varepsilon_z)(\alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi) = -\theta^2 y,$$

но с учетом скоростей условие (14) для совмещенного движения (17) выполняется

$$-\varphi_t y(-\theta^2 x) + \varphi_t x(-\theta^2 y) = 0.$$

Выполнение уравнений (15) может быть достаточным условием правильности решения и в случае неоднородной деформации, например при изгибе в условиях плоской деформации с уравнениями

$$x = \rho\sin\psi, \qquad y = -r + \rho\cos\psi, \qquad z = \gamma, \qquad \psi = \xi\alpha/\rho, \tag{18}$$

где ξ – неизвестная функция времени и лагранжевых координат, произведение $(\xi\alpha)$ определяет новую длину волокна с текущим радиусом $\rho(r, \beta)$, r – радиус волокна $\beta = 0$, которое в исходном состоянии совпадает с осью x. Принимая, что волокна при изгибе преобразуются в дуги окружностей, можем записать $\partial\rho/\partial\alpha = 0$. Область определения лагранжевых координат определяют размеры образца $0 \le \alpha \le L$, $-a \le \beta \le b$, где L – длина, a, b – ординаты нижней и верхней поверхностей, ограничивающих объем заготовки, в исходном состоянии.

Принимая гипотезу плоских сечений, согласно которой

$$\psi = \alpha/r, \quad \xi = \rho/r, \qquad R = \Delta V/\Delta V_0 = \frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\rho}{r}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 1/r, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0,$$

оба уравнения (15) преобразуются в линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\partial^2\rho/\partial\beta^2 = \rho/r^2,$$

общее решение которого [19] имеет вид

$$\rho = C_1\exp\left(\frac{\beta}{r}\right) + C_2\exp\left(-\frac{\beta}{r}\right).$$

Из граничного условия $\rho = r$ при $\beta = 0$ имеем $C_1 + C_2 = r$. Если наружный контур свободен от внешних воздействий, в ортогональном направлении деформация должна отсутствовать:

$$\partial\rho / \partial\beta = 1 \text{ при } \beta = b.$$

Из получаемой системы двух уравнений, ограничиваясь двумя первыми членами разложения в ряд функции exp(x) = 1 + x, находим $C_1 = r\text{-}b/2$, $C_2 = b/2$. Окончательно вместо уравнений (18) получаем

$$x = \rho\sin(\alpha / r), \quad y = -r + \rho\cos(\alpha / r), \quad z = \gamma, \quad \psi = \alpha / \rho,$$
$$\rho = (r - b/2)\exp(\beta / r) + b/2\exp(-\beta / r).$$

Производные

$$x_\alpha = (\rho / r)\cos(\alpha / r), \qquad x_{\alpha\alpha} = -(\rho / r^2)\sin(\alpha / r),$$
$$x_\beta = \rho_\beta\sin(\alpha / r), \qquad x_{\beta\beta} = \rho_{\beta\beta}\sin(\alpha / r) = (\rho / r^2)\sin(\alpha / r),$$

обеспечивают выполнение условий (15):

$$x_{\alpha\alpha} + x_{\beta\beta} = (-\rho / r^2 + \rho / r^2)\sin(\alpha / r) = 0.$$

Требования закона сохранения энергии в пластической области будут рассмотрены ниже при определении уравнений движения частиц изгибаемой полосы в области необратимых деформаций.

Для анализа особенностей комплексных технологических операций целесообразно использовать суперпозицию простых, которые являются основой исследуемых. Для этого достаточно иметь уравнения движения для пластических деформаций при линейном растяжении, сдвиге, кручении, изгибе, которые имеются в работах [9–10]. Их суперпозиция позволит выявить особенности пластического течения и требуемые энергосиловые параметры при более сложных внешних воздействиях. Точность результата можно оценить по выполнению условия постоянства объема, которое предполагается для области необратимых деформаций.

С учетом особенностей рассматриваемых процессов могут быть использованы либо декартова, либо цилиндрическая системы координат. Основные соотношения для расчета кинематических и энергетических параметров при переходе от декартовой системы к цилиндрической приведены в работах [14, 16]. Например, при осадке с кручением цилиндрических образцов целесообразно воспользоваться уравнениями:

для осадки

$$\rho = \rho_0\sqrt{h_0 / h}, \qquad z = z_0 h / h_0, \qquad \varphi = \varphi_0,$$

и кручения

$$\rho = \rho_0, \qquad z = z_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + (\theta / L)z_0.$$

При выборе любого из движений в качестве внешнего, получаем уравнения совмещенной деформации

$$\rho = \rho_0\sqrt{h_0 / h}, \qquad z = z_0 h / h_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + (\theta / L)z_0.$$

Объем заготовки в процессе деформации не изменяется

$$R = \frac{\delta V}{\delta V_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{vmatrix} \partial\rho/\partial\rho_0 & \partial\rho/\partial z_0 \\ \partial z/\partial\rho_0 & \partial z/\partial z_0 \end{vmatrix} = \sqrt{h_0/h}\begin{vmatrix} \sqrt{h_0/h} & 0 \\ 0 & h/h_0 \end{vmatrix} = 1 .$$

Как отмечено выше, однородная деформация обеспечивает достаточные условия для выполнения условий равновесия. В случаях с неоднородной деформацией, например при изгибе, требуется дополнительная проверка выполнения закона сохранения энергии.

В частности, во многих технологических процессах обработки давлением используют изгиб широкой полосы, когда приемлемым является предположение, что волокна преобразуются в дуги окружностей. В этом случае для области пластических деформаций можно использовать уравнения, подобные (18)

$$x = \rho\sin\psi\ ;\quad y = -r + \rho\cos\psi\ ,\qquad z = z(\gamma, r, \rho)\ , \tag{19}$$

с аналогичной областью определения переменных Лагранжа $0 \le \alpha \le L$, $-a \le \beta \le b$, $-B/2 \le \gamma \le B/2$, B, L – ширина и длина заготовки, $a + b = H_0$ –толщина полосы в исходном состоянии, a и b – ординаты нижней и верхней поверхностей, ограничивающих объем заготовки, $\rho(\beta, r)$ – радиус кривизны волокна с координатой β, $\psi(\alpha, \beta, r)$ – угол поворота сечения по отношению к исходному состоянию, r – радиус волокна с координатой $\beta = 0$, которое проходит через начало координат.

Реальные зависимости между напряжениями и деформациями в области пластических деформаций существенно усложняют решение дифференциального уравнения (12). Однако, если ограничиться анализом устойчивых состояний, тогда можно принять, что напряжения, как и в упругой области, отличаются от деформаций множителем φ, который не является константой $\tau_{pi} = \varphi x_{i,\alpha_p}$, тензор напряжений Коши остается симметричным $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, а уравнения равновесия принимают вид

$$\partial(\varphi x_{i,\alpha_p})/\partial\alpha_p = 0\,. \tag{20}$$

Функция φ монотонно убывает от начального значения φ = 3K, асимптотически приближаясь к φ = 0 при больших пластических деформациях [11–12]. При изгибе максимальные деформации крайних волокон существенно меньше, чем в других операциях обработки давлением. Но даже в области развитых деформаций значение φ существенно превышает интенсивность ее изменения $\partial\varphi/\partial\alpha_p$ в пространстве переменных Лагранжа. Тогда уравнение (20), преобразованное к виду:

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}x_{i,\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}x_{i,\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}x_{i,\gamma}\right) + x_{i,\alpha\alpha} + x_{i,\beta\beta} + x_{i,\gamma\gamma} = 0\,,$$

позволяет утверждать, что и в области развитых пластических деформаций уравнения движения (1) с достаточной точностью могут быть найдены из системы уравнений Лапласа (15), каждое из которых содержит одну неизвестную функции $x_i(\alpha_p,t)$. Получаемое при этом решение и принцип суперпозиции позволяют перейти к любому другому исходному состоянию полосы, в том числе с произвольным знаком кривизны.

Не накладывая ограничений на отношение ширины заготовки B к её толщине H_0, рассмотрим, какой вид может иметь функция ψ в уравнениях (19). Пренебрегая изменением функции φ по объёму полосы, вместо (12) получим 3 уравнения:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial\beta^2}-\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2\right]=0,$$

$$2\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)+\rho\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\gamma^2}=0. \tag{21}$$

Система содержит три неизвестные функции: текущий радиус частицы $\rho(\alpha,\beta,r)$, угол $\psi(\alpha,\beta,r)$ и координату $z(\gamma,\beta,r)$. В пластической области она должна быть дополнена условием постоянства объёма

$$\rho z_\gamma\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)=1. \tag{22}$$

Уравнению (21) удовлетворяет линейная функция

$$z=\gamma\zeta(\beta) \quad \text{при} \quad \zeta(\beta)=1-\chi\beta.$$

Так как радиальная координата $\rho(\beta,r)$ не должна зависеть от переменной α, уравнение (22) принимает вид

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=1/z_\gamma. \tag{23}$$

Отсюда следует, что угловая координата $\psi(\alpha,\beta,r)$ должна быть линейной функцией α, например

$$\psi=\alpha/r+\xi(\beta).$$

Уравнение (25) преобразуется к виду

$$\partial(\rho^2)/\partial\beta=2r/z_\gamma,$$

после интегрирования находим

$$\rho^2=f_1(r)-2\frac{r}{\chi}\ln(1-\chi\beta),$$

где функция $f_1(r)$ должна быть определена из граничного условия $\rho = r$ при $\beta = 0$. Тогда $f_1(r)=r^2$ и для радиуса кривизны получаем

$$\rho^2=r^2-2\frac{r}{\chi}\ln(1-\chi\beta). \tag{24}$$

Из условия отсутствия радиальных деформаций на наружном контуре ($\rho_\beta=1$ при $\beta = b$) находим

$$\frac{\sqrt{r}}{1-\chi b}=\sqrt{r-(2/\chi)\ln(1-\chi b)} \quad \text{или} \quad \chi\approx\frac{1}{b}\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+2b}}\right). \tag{25}$$

Результаты расчетов по уравнениям (24) – (25) практически совпадают с получаемыми из условий плоской деформации ($z_\gamma=1$) и постоянства объёма при гипотезе плоских сечений ($\xi = 0$), когда:

$$\rho^2=r(r+2\beta). \tag{26}$$

При изгибе до относительного радиуса кривизны $r/b = 5$ с достаточной для практических целей точностью можно пользоваться решением для упругого состояния [9]. При этом приращение среднеквадратического отклонения Г можно определить по уравнению (11). Результат отличается от накопленной деформации (мерой Одквиста), вычисленной по общепринятой методике [7–10], лишь постоянным множителем.

Для исходной плоской полосы приращение среднеквадратического отклонения составляет:

$$\Delta\Gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{b}{r}-1\right).$$

Если в исходном состоянии полоса имела начальную кривизну r_0, тогда:

$$\Delta\Gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{b}{r}-\frac{b}{r_0}\right).$$

При достижении среднеквадратическим отклонением Г предельного значения $\Gamma_s = T_s/\varphi$, где $T_s=\sqrt{2/3}\sigma_s$, T_s - предел текучести (в обычной и новой шкале его величина остается одинаковой), при радиусе кривизны

$$\frac{b}{r_s}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{T_s}{\varphi}+\frac{b}{r_0}$$

растянутые волокна на поверхности заготовки переходят в пластическое состояние.

Если в процессе деформации изменяется знак кривизны, тогда приведенные выше соотношения принимают вид:

$$\Delta\Gamma_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{b}{r}+\frac{b}{r_0}\right), \qquad \frac{b}{r_s}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{T_s}{\varphi}-\frac{b}{r_0}.$$

Учитывая, что упругая деформация является обратимой, разгрузка из пластического состояния полосы с радиусом кривизны r_i должна завершиться переходом её в устойчивое состояние с радиусом кривизны r_k, изменение кривизны полосы в процессе разгрузки составит:

$$\frac{b}{r_i}-\frac{b}{r_k}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{T_s}{\varphi}.$$

При этом момент внутренних сил в конечном состоянии обращается в ноль.

В соответствии с решением (26) при отсутствии растягивающих усилий радиус слоя, длина которого не изменяется (нейтральный слой деформаций), равен среднему геометрическому внутреннего r_a и наружного r_b радиусов полосы:

$$r_0^2 = r_b r_a .$$

Так как радиальная и осевая компоненты деформации на наружном контуре отсутствуют и деформация монотонна, изменение среднеквадратического отклонения для крайних волокон можно определить по уравнению:

$$\Delta\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{b}{r} - 1\right).$$

Если деформация сопровождается промежуточной разгрузкой или изменением знака кривизны, необходимо, в соответствии с уравнением (11), проинтегрировать (по модулю) скорость изменения среднеквадратического отклонения

$$\Gamma_t = -\frac{r_t}{r^2}\sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{(2\beta - b)^2}{6}} .$$

Приращение работы деформации определяет интеграл по объему заготовки

$$dU = T_s \int_{V_0} | \, d\Gamma \, | \delta V_0$$

или в условиях чистого изгиба

$$Md\psi = Md(L_0 / r) = -ML_0 dr / r^2 .$$

С учетом деформированного состояния полосы для изгибающего момента получаем

$$M = T_s B_0 \int_{-a}^{b} \sqrt{\frac{2}{3}(\beta^2 - \beta b + b^2)} \delta\beta \approx \frac{1}{4} T_s B_0 H_0^2 .$$

Для совмещенного изгиба широкой полосы с ее растяжением можно воспользоваться уравнениями (19) с учетом (26) для изгиба

$$x = \sin(\alpha / r)\sqrt{r(r + 2\beta)} , \qquad y = \cos(\alpha / r)\sqrt{r(r + 2\beta)} - r , \qquad z = \gamma ,$$

и уравнениями для растяжения

$$x = \alpha \exp(\varepsilon_x) , \qquad y = \beta \exp(-\varepsilon_x) , \qquad z = \gamma .$$

Принимая растяжение в качестве внешнего движения, в результате суперпозиции получим:

$$x = \exp(\varepsilon_x)\sqrt{r(r + 2\beta)} \sin(\alpha / r) , \qquad y = \exp(-\varepsilon_x)[\cos(\alpha / r)\sqrt{r(r + 2\beta)} - r] , \quad z = \gamma .$$

Если внешним движением считать изгиб, тогда уравнения совмещенного движения будут иметь другой вид

$$x = \sin[\alpha \exp(\varepsilon_x) / r]\sqrt{r[r + 2\beta \exp(-\varepsilon_x)]} ,$$

$$y = \cos[\alpha \exp(\varepsilon_x) / r]\sqrt{r[r + 2\beta \exp(-\varepsilon_x)]} - r , \qquad z = \gamma ,$$

но численные результаты расчета по двум вариантам за счет малости *εx* практически совпадают.

Особо отметим, что приведенные выше значения радиусов кривизны после разгрузки и момента внешних сил при изгибе должны быть достаточно близки к действительным, так как при определении уравнений движения использовано уравнение (12). Однако они могут существенно отличаться от соответствующих значений при совмещении операций изгиба с растяжением, если совмещенное движение не соответствует условию (12) закона сохранения энергии.

Для установившихся процессов внешним должно быть перемещение заготовки с известной скоростью инструмента. Например, поперечно-винтовую прокатку можно рассматривать как наложение поступательного движения с постоянной скоростью v_0 в направлении оси прокатки z:

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma + v_0 t,$$

вращения с угловой скоростью ω_0 вокруг оси z:

$$x = \alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi, \qquad y = \alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \omega_0 t, \qquad z = \gamma,$$

и непосредственной деформации в пространстве между валками и в примыкающих к нему объемах (внешние зоны деформации). Предполагая деформацию однородной по сечению заготовки и используя логарифмическую меру:

$$\varepsilon = \ln(l / l_0),$$

процесс можно описать простейшими уравнениями как при линейном растяжении в направлении оси z

$$z = \gamma\exp(\varepsilon_z), \qquad x = \alpha\exp(-0,5\varepsilon_z), \qquad y = \beta\exp(-0,5\varepsilon_z).$$

Если расстояние между плоскостями начала и окончания деформации обозначить через L, тогда можно записать $\varepsilon_z = \varepsilon_k v_c t / L$, где ε_k – деформация частиц при выходе из очага деформации, v_c – усредненная по длине очага деформации скорость заготовки. В результате суперпозиции уравнения совмещенного движения принимают вид:

$$x = \exp(-\varepsilon_0 v_c t / L)(\alpha\cos\Delta\varphi - \beta\sin\Delta\varphi),$$
$$y = \exp(-\varepsilon_0 v_c t / L)(\alpha\sin\Delta\varphi + \beta\cos\Delta\varphi), \quad z = \gamma\exp(-\varepsilon_0 v_c t / L) + v_0 t.$$

Лагранжевы координаты α и β соответствуют координатам частиц в плоскости начала деформации, координата γ – значению z при $t = 0$. Деформация происходит без изменения объема частиц. При отсутствии деформации ($\varepsilon_k = 0$) скорость частиц в направлении оси z остается неизменной. Дифференцирование этих уравнений позволяет определить компоненты скорости, деформации и другие кинематические, а затем силовые и энергетические локальные и интегральные характеристики, необходимые для расчета энергосиловых параметров или оптимизации процесса.

ВЫВОДЫ

Описание движения в форме (1) обеспечивает простоту реализации принципа суперпозиции с заменой переменных Лагранжа внешнего движения соответствующими уравнениями для переменных Эйлера внутреннего движения. Уравнения совмещенного движения могут соответствовать закону сохранения энергии с учетом взаимодействия частиц тела, если они удовлетворяют условию независимости энергии от выбора системы отсчета скоростей (12).

В области пластических деформаций, также как и при обратимых деформациях, возможно аналитическое определение уравнений движения на основе уравнений Лапласа.

В области пластических деформаций выбор внешнего и внутреннего движений за счет достаточно малых перемещений практически не влияет на точность результатов расчета, например при суперпозиции изгиба и растяжения полосы. Рекомендовано выбирать внешнее и внутреннее движения так, чтобы итоговые уравнения совмещенного движения имели более простой вид.

Оценивать возможность реализации совмещаемых движений по дифференциальным уравнениям равновесия нецелесообразно, так как они допускают потерю возможных правильных решений. Точность описания уравнений движения можно характеризовать по выполнению условия постоянства объема, которое обычно предполагается для области необратимых деформаций.

Результаты суперпозиции движений при неравномерной необратимой деформации можно рассматривать как кинематически возможные и использовать для определения верхней оценки мощности требуемых внешних воздействий [11–14].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиева Л. И. Совершенствование процессов комбинированного выдавливания: монография. Краматорск: ООО "Тираж – 51", 2018. 352 с.

2. Алиев И. С., Гнездилов П. В. Сравнительный анализ способов выдавливания полых конических деталей. 17th International scientific conference "New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering" : Series: Monografie. 56. Częstochowa, 2016, pp. 179–182.

3. Алиева Л. И. Процессы комбинированного выдавливания и деформирования. *Обработка материалов давлением*. Краматорск: ДГМА. 2016. № 1 (42). С. 100–108.

4. Алиев И. С., Корденко М. Ю., Самоглядов А. Д. Комбинированное выдавливание полых конических деталей. *Обработка материалов давлением*. Краматорск: ДГМА. 2018. № 2 (47). С. 90–95.

5. Алиева Л. И., Титов А. В., Корденко М. Ю. Моделирование процессов поперечного бокового выдавливания. *Обработка материалов давлением.* Краматорск: ДГМА, 2019. № 1 (48). С. 35–44

6. Соколов Л. Н., Алиев И. С, Марков О. Е., Алиева Л. И. Технология ковки: учебник для вузов. Краматорск: ДГМА, 2011. 268 с

7. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. Москва: Металлургия, 1986. 598 с.

8. Алиева Л. И., Грудкина Н. С., Крюгер К. Моделирование процесса радиально-обратного выдавливания полых деталей. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 1 (79). С. 91–99.

9. Алюшин Ю. А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа. Москва: Машиностроение, 1997. 136 с.

10. Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики: учеб. пособ. для вузов. Москва: Машиностроение, 1999. 192 с.

11. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Физматгиз, 1979. 744 с.

12. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 312 с.

13. Алюшин Ю.А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа. *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2001. № 3. С. 13–19.

14. Алюшин Ю. А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа. Москва: Машиностроение, 2012. 192 с.

15. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1986. 720 с.

16. Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики. *Lambert Academic Publishing*. 2016. 281 с.

17. Алюшин Ю. А. Новая концепция в механике на основе понятий пространство, время и энергия. *Физическая мезомеханика.* 2018. № 21. 3. С. 59–69.

18. Алюшин Ю. А. Энергетическая основа резонанса в упругих телах. *Физическая мезомеханика.* 2019. № 22. 5. С. 42–53.

19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 576 с.

REFERENCES

1. Aliieva L.I. Improvement of combined extrusion processes: monograph. Kramatorsk: LLC “TIRAZH-51”. 2018. 352 p. (*in Russian*).

2. Aliiev I.S., Gnezdilov P.V. Comparative analysis of methods of extrusion of hollow conical parts. *17th international scientific conference “New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering”* : Series: Monografie. 56. Częstochowa. 2016, pp. 179–182. (*in Russian*).

3. Aliieva L.I. Processes of combined extrusion and deformation. *Materials Working by Pressure*. Kramatorsk: DSEA. 2016, 1 (42), pp. 100–108. (*in Russian*).

4. Aliiev I.S., Kordenko M.Yu., Samoglyadov A.D. Combined extrusion of hollow conical parts. *Materials Working by Pressure*. Kramatorsk: DSEA. 2018. 2 (47). pp. 90–95. (*in Russian*).

5. Aliieva L.I., Titov A.V., Kordenko M. Yu. Modeling of cross-lateral extrusion processes. *Materials Working by Pressure*. Kramatorsk: DSEA. 2019, 1 (48), pp. 35–44 (*in Russian*).

6. Sokolov L.N., Aliiev I.S., Markov O.E., Aliieva L.I. Technology of Forging: Textbook for Universities. Kramatorsk: DSEA. 2011, 268 p. (*in Russian*).

7. Kolmogorov V.L. Mechanics of metal processing by pressure, Moscow: Metallurgy. 1986, 598 p. (*in Russian*).

8. Aliieva L.I., Grudkina N.S., Kruger K. Simulation of the process of radial-reverse extrusion of hollow parts. *Mechanics and Advanced Technologies.* 2017, 1 (79), pp. 91–99. (*in Russian*).

9. Alyushin Yu.A. Mechanics of deformation processes in the space of Lagrange variables. Moscow: Mechanical Engineering. 1997, 136 p. (*in Russian*).

10. Alyushin Yu.A. Energy Foundations of Mechanics: Textbook. manual for universities. Moscow: Mechanical Engineering. 1999, 192 p. (*in Russian*).

11. Rabotnov Yu.N. Mechanics of a deformable solid. Moscow: Fizmatgiz. 1979, 744 p. (*in Russian*).

12. Prager V. Introduction to continuum mechanics, Moscow: Foreign literature publishing House. 1963, 312 p. (*in Russian*).

13. Alyushin Yu.A. The principle of superposition of movements in the space of Lagrange variables. Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 2001, 3, pp. 13–19. (*in Russian*).

14. Alyushin Yu.A. solid state Mechanics in Lagrange variables. Moscow: Mechanical Engineering. 2012, 192 p. (*in Russian*).

15. Korn T. Handbook of mathematics for researchers and engineers. Moscow: Science. 1986, 720p. (*in Russian*).

16. Alyushin Yu.A. Energy bases of mechanics. Lambert Academic Publishing. 2016, 281 p. (*in Russian*).

17. Alyushin Yu.A. A new concept in mechanics based on the concepts of space, time and energy. *Physical mesomechanics.* 2018, 21. 3, pp. 59–69 (*in Russian*).

18. Alyushin Yu.A. Energy basis of resonance in elastic bodies. *Physical mesomechanics.* 2019, 22. 5, pp. 42–53. (*in Russian*).

19. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Science. 1971, 576 p. (*in Russian*).

Алюшин Юрий Алексеевич – д-р техн. наук, проф. НИТУ МИСиС.

НИТУ МИСИС – Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, г. Москва, РФ.

E-mail: alyushin7@gmail.com
ORCID http://orcid.org/0000-0001-9977-3342

Статья поступила в редакцию 11.01.2020 г.